This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

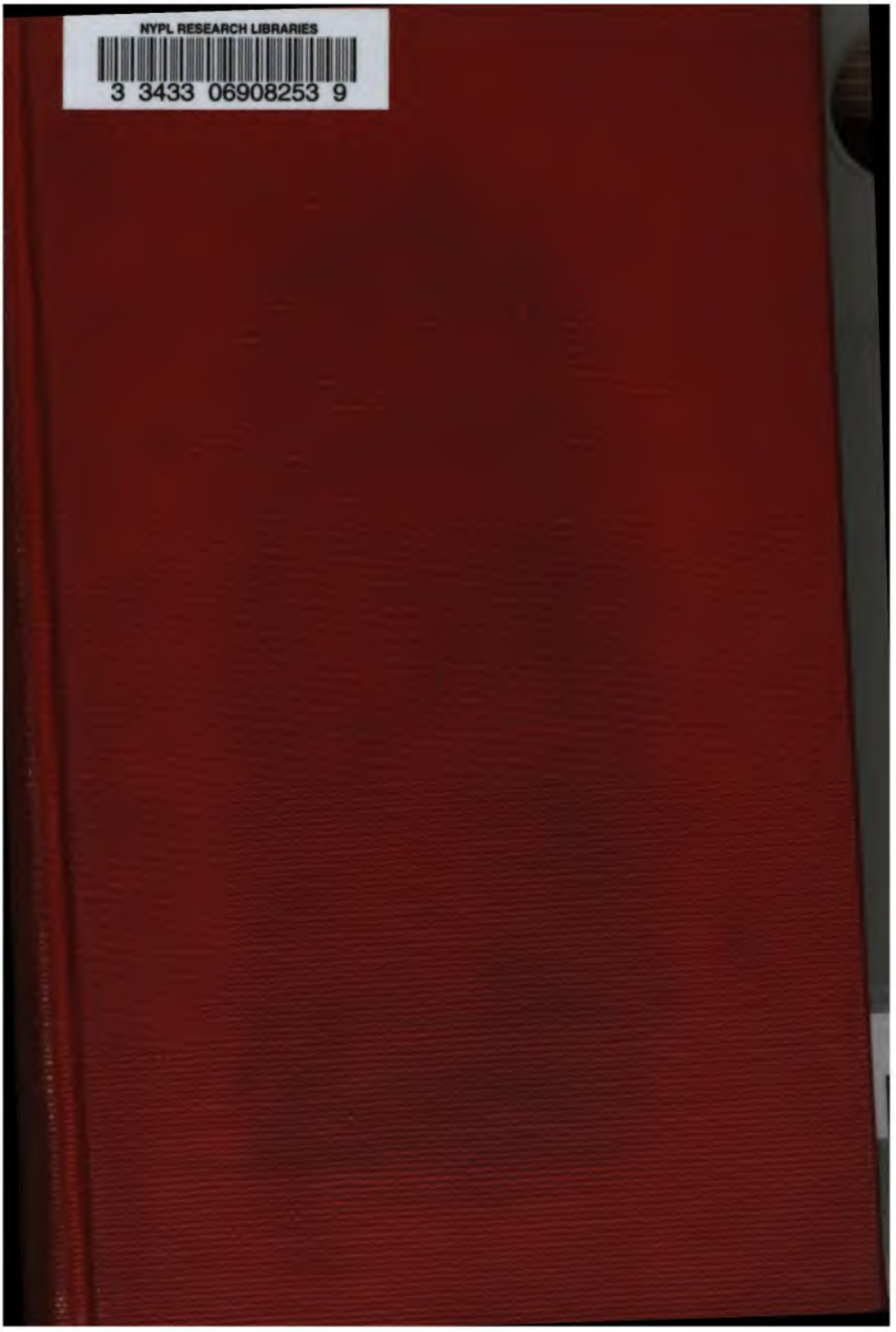
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06908253 9

OCLC
Stainville

OGT

MÉLANGES

D'ANALYSE ALGÉBRIQUE

ET

DE GÉOMÉTRIE.

DE L'IMPRIMERIE DE Mme Ve COURCIER.

MÉLANGES

D'ANALYSE ALGÉBRIQUE

ET

DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. J. DE STAINVILLE,

Répétiteur-Adjoint à l'École royale Polytechnique.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

A PARIS,

Chez Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1815.

PUBLIC
LIBRARY

A

MONSIEUR DELAMBRE,

Trésorier de l'Université de France, Secrétaire perpétuel de l'Institut pour les Sciences-Mathématiques, Professeur d'Astronomie au Collége royal de France, Membre du Bureau des Longitudes, des Sociétés royales de Londres, d'Upsal et de Copenhague, des Académies de Saint-Pétersbourg, de Berlin et de Suède, de la Société italienne, de l'Académie de Philadelphie, etc., etc., Chevalier de la Légion-d'Honneur,

Hommage d'attachement, de respect et de reconnaissance.

DE STAINVILLE.

TABLE DES MATIÈRES.

AVERTISSEMENT.

L'OBJET que je me suis proposé en publiant cet Ouvrage, a été de développer quelques points d'analyse algébrique qui m'ont paru pouvoir être étendus ou simplifiés. Pour en rendre la lecture plus facile, j'ai cru devoir établir entre les vérités qu'il renferme, la liaison nécessaire pour passer sans effort de l'une à l'autre, parce que cette marche réunit à l'avantage de classer les idées et de montrer leur génération, celui de faire saisir à la fois un plus grand nombre de rapports.

L'étendue que comporte le titre de cet Ouvrage me laissait la liberté de traiter différens sujets et de revenir plusieurs fois sur le même; j'en ai profité toutes les fois que de nouvelles considérations m'ont paru pouvoir répandre une plus grande

lumière sur les matières qui avaient déjà été développées, ou offrir à l'esprit quelque chose de particulier.

Quant à l'exécution de l'Ouvrage, je ne me permettrai point d'en parler; il renferme sans doute un grand nombre d'imperfections; cependant parmi les choses qui s'y trouvent, j'ai lieu d'espérer qu'il en est quelques-unes qui pourront offrir quelque intérêt, plus encore par ce qu'elles sont en elles-mêmes, que par la manière dont elles sont présentées.

TABLE ABRÉGÉE
DES MATIÈRES
Contenues dans ce volume.

N. B. *La grosseur de ce volume n'ayant pu permettre d'y joindre une Table détaillée, on s'est vu restreint à présenter seulement dans celle-ci les principaux articles qu'il renferme.*

DÉMONSTRATION de la loi des coefficiens dans le produit de plusieurs facteurs binomes qui ont un terme commun, n^os 2 et suiv.

Démonstration très-simple de la formule du binome dans le cas de l'exposant entier et positif, n^os 6 et suiv.

Dans la formule du binome, les coefficiens numériques pris à distances égales des extrêmes sont égaux, n^os 10 et suiv.

Démonstration de la loi des coefficiens dans le produit de plusieurs facteurs binomes et réciproques à $x-a$, $x-b$, $x-c$, . . . n^o 19.

Première démonstration du binome pour le cas de l'exposant entier et négatif, en faisant usage des nombres figurés, n^os 21 et suiv.

Autre démonstration du binome pour le cas de l'exposant entier et négatif, en ayant recours à la théorie des combinaisons, n^os 30 et suiv.

Démonstration complète de la formule du binome lorsque l'exposant est fractionnaire ou incommensurable, positif ou négatif, n^os 35 et suiv.

On peut substituer à la formule du binome une autre formule qui soit toujours convergente et applicable à l'extraction des racines, n° 38.

Théorie générale des équations, n^os 43 et suiv.

Problèmes divers sur la transformation des équations.

Démonstration de la formule qui donne la somme des puissances entières positives ou négatives des racines d'une équation en fonction des coefficiens de cette équation, n^os 61 et suiv.

Etant donné un polynome, en trouver un qui soit la somme des produits $m-n$ à $m-n$ des facteurs du premier degré dans lesquels le polynome proposé se décompose, et qui ait ses coefficiens exprimés en fonction des coefficiens du premier polynome, n° 67.

Application du problème précédent à la recherche des racines égales d'un polynome, 68 et suiv. Conséquences qui en résultent.

Résolution numérique des équations, n^os 76 et suiv.

Si dans un polynome qui ne renferme que des puissances entières et positives d'une variable, on substitue deux nombres et que les résultats des substitutions soient de signes contraires, il y aura au moins une racine de comprise entre les nombres substitués, n° 79.

Lorsqu'un polynome rationnel n'a qu'une seule variation de signe, il a une racine réelle positive et ne peut en avoir un plus grand nombre, n° 92.

Démonstrations diverses touchant les limites des racines d'une équation, n^os 94 et suiv.

Tout polynome d'un degré impair a au moins une racine réelle d'un signe contraire à celui de son dernier terme; et tout polynome d'un degré pair, dont le dernier termé est négatif, en a au moins deux, l'une positive et l'autre négative, n° 100.

Un polynome qui n'admet pas de racines réelles, a des racines imaginaires de la forme de celles qui sont données par des équations du second degré, et ce polynome est le produit d'autant de facteurs du second degré, qu'il est marqué par la moitié du degré du polynome, n^os 105 et suiv.

Résolution générale des équations du troisième degré et discussion des racines, n^os 115 et suiv.

Démonstration du cas irréductible, n^os 120 et suiv.

Autre manière de résoudre les équations du troisième degré, n° 128.

Nouvelle démonstration du cas irréductible, n° 129.

Toute équation de degré impair de la forme....., $x^m + px + q = 0$, a toujours trois racines réelles, et $m-3$ imaginaire, lorsqu'on a

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{p}{m}\right)^m = < 0,$$

n^os 132 et suiv.

Résolution des équations du troisième degré par les lignes trigonométriques, n^os 149 et suiv.

Résolution des équations du quatrième degré, n^os 159 et suiv.

Discussion des racines, n° 162 et suiv.

Nouvelle méthode de résoudre les équations du quatrième degré, n^os 181 et suiv.

Equations binomes par les lignes trigonométriques, conséquences qui en résultent, n^os 198 et suiv.

Démonstration générale du binome, n^os 217 et suiv.

Développement des exponentielles en séries, n° 223.

Détermination du module par une série convergente, n° 227.

Le nombre e est irrationnel, n° 232.

Nouvelle manière d'obtenir le développement des exponentielles, n^os 238 et suiv.

L'intégrale $\int e^{-t^2} dt$ prise depuis $t = 0$ jusqu'à t infini, est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, n° 248.

Développement des logarithmes, n^os 252 et suiv.

La série harmonique a une valeur infinie, n° 260.

Nouvelle manière de trouver les sommes des puissances des racines d'une équation en fonction des coefficiens de cette équation, n° 289.

Développement des sinus et des cosinus en fonction de l'arc, n^os 290 et suiv.

Développement de l'arc en fonction du sinus, n^os 294 et suiv.

Développement du carré de l'arc en fonction du sinus, n° 297.

Liaison des exponentielles imaginaires avec les fonctions angulaires; formules qui en résultent, n^os 298 et suiv.

Démonstration simple des formules qui donnent les sinus, les cosinus des tangentes de la somme d'un nombre quelconque d'arcs, n^os 319 et suiv.

Expression de la différence de deux arcs en fonctions de la différence des tangentes de ces arcs et des quantités angulaires du plus petit de ces arcs, n^os 327 et suiv.

Formules convergentes qui donnent l'arc par la tangente, n^os 333 et suiv.

Séries qui donnent les cosinus et sinus d'un arc multiple en fonction des puissances des sinus ou des cosinus de l'arc simple; formules nouvelles qui en résultent, n^os 330 et suiv.

Développement du cosinus d'un arc multiple en fonction

des puissances des cosinus de l'arc simple, n^os 352 et suiv.

Détermination d'un arc d'ellipse par les séries, n^os 358 et suiv.

Décomposition des sinus et cosinus en facteurs infinis, n^os 360 et suiv.

Décomposition en facteurs de la somme et de la différence de deux exponentielles, n^os 373 et suiv.

Théorème de Leibnitz, n° 379.

Intégration des équations linéaires d'un ordre quelconque à coefficiens constans, n° 380.

Extension du théorème de Leibnitz au cas où les indices seraient entiers et négatifs ; conséquences qui en résultent, n^os 381 et suiv.

Démonstration très-simple du théorème de Taylor et détermination des limites de cette série, n^os 385 et suiv.

Démonstration analytique de l'aire d'un rectangle, n° 291.

Démonstration du parallélogramme des forces, n^os 293 et suiv.

Décomposition des fractions rationnelles en fractions plus simples, n^os 414 et suiv.

Intégration de $\int d\nu \psi \{\sin \nu, \cos \nu\}$, n° 429.

Mener une tangente à la cycloïde par un de ses points, n° 430.

Quadrature de la cycloïde, n° 451.

La développée de la cycloïde est une cycloïde, n° 542.

Rectification d'un arc quelconque de cycloïde, n° 544.

Dans la cycloïde, le carré d'un arc compté du milieu de cette cycloïde est égal au quadruple du rectangle du diamètre du cercle générateur par la projection de cet arc sur une droite perpendiculaire à l'axe, n° 546.

La cycloïde est une courbe à la fois isochrone et brachistochrone, n^os 548, 549 et suiv.

Si un cercle roule dans un autre cercle d'un rayon double, un point quelconque du premier cercle engendre une ellipse dont les axes sont la plus courte et la plus longue distance de ce point au centre, n^os 553 et suiv.

Dans la logarithmique la soutangente est constante, n° 555.

Quadrature de l'aire asymptotique de la logarithmique, n^os 556 et suiv.

Cubature du solide engendré par la logarithmique en tournant autour d'une ordonnée ou autour de son asymptote, n^os 560 et suiv.

Cubature d'un segment de paraboloïde, n° 566

Le produit de plusieurs facteurs qui font une même somme ne peut être un maximum lorsque les facteurs sont inégaux, 568 et suiv.

Partager une quantité donnée en un nombre quelconque de parties, de manière que le produit de ces parties élevées chacune à des puissances données, soit un maximum, n^os 572 et suiv.

Inscrire dans un triangle donné un parallélogramme dont deux côtés reposent sur deux côtés du triangle, et dont le produit de la puissance *m* de la base par la puissance *n* du côté adjacent soit un maximum, n° 574.

Mener une tangente à une hyperbole d'un ordre quelconque, n^os 575.

Quadrature d'un portion de l'aire asymptotique d'une hyperbole de tous les genres, n° 576.

Mener une tangente à l'hyperbole du premier genre, n° 577.

Les parties d'une droite interceptées entre une hyperbole et les asymptotes, sont égales entre elles, n° 578.

L'aire asymptotique de l'hyperbole de la première espèce est infinie, n° 580.

Cubature du solide engendré par l'espace asymptotique en tournant autour d'une asymptote, n° 581.

Trouver l'aire d'un polygone en fonction des coordonnées des sommets, n° 583.

Théorèmes divers, n°s 586 et 587.

Etant donnés les côtés d'un triangle sphérique, trouver les angles, n° 588.

Les perpendiculaires abaissées des sommets des angles d'un triangle sur les côtés opposés, se coupent en un même point, soit que le triangle soit rectiligne ou sphérique, n°s 589 et 590.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	
5	13	au lieu de élevée *mettez* élevées
24	11	au lieu de ou *mettez* et
27	17	au lieu de a *mettez* $-a$
28	7	au lieu de m *mettez* $m-1$
35	17	au lieu de $n^{ième}$ *mettez* $(n+1)^{ième}$
47	14	au lieu de exprimant *mettez* exprime
55	24	*remplacez* ....m par ....$n+1$
59	11	*supprimez* du produit
87	9	au lieu de $+x-b$ *mettez* $i+x-b$
98	21	*remplacez* R par S et S par R
154	24	au lieu de pair *mettez* impair, et au lieu de impair *mettez* pair
Ibid,	26	*écrivez* $\frac{(2k+1)\pi}{m}$ et $\frac{2k\pi}{m}$ au lieu de $\frac{2k\pi}{m}$ et $\frac{(2k+1)\pi}{m}$
157	24	au lieu de BAC *mettez* $BAB^{(n-1)}$
195	9	*remplacez* $+3aa^2b$ par $-3aa^2b$
196	5–13	*remplacez* $\sqrt{-3}$ par $-\sqrt{-3}$
Ibid,	11	au lieu de q *mettez* $\frac{q}{2}$
224	13	au lieu de soient *mettez* fussent
225	13	au lieu de convergentes *mettez* divergentes
234	17	*remplacez* — *par* + et cos 2ψ *par* cosec 2ψ
234	18	au lieu de $2\sqrt{}$ *mettez* $-2\sqrt{}$

Pages.	Lignes.	
238	3	au lieu de petit *mettez* grand
240	18	*supprimez* —1 et *substituez* —2
284	9-13-14	*remplacez* $-\frac{q}{4a}$ *par* $\frac{q}{4a}$ *et* $+\frac{q}{4a}$ *par* $-\frac{q}{4a}$
285	18	au lieu de $\frac{1}{4}bc$ *mettez* $-2bc$
289	7	*remplac.* $\frac{bc}{4}=\frac{\sqrt{p^2-4r}}{16}$ *par* $2bc=\frac{\sqrt{p^2-4r}}{2}$
291	18	*lisez* $\{\cos a-\sqrt{-1}\sin a\}^m=\{\cos a+\sqrt{-1}\sin a\}^{-m}$
Ibid,	20	au lieu de $\{\ \}^m$ *mettez* $\{\ \}^{-m}$
292	18	*remplacez* rationnel *par* irrationnel
293	13-14	*changez* n en m
295	17	*remplacez* k *par* $2k+1$
298	12-15	*effacez* — 1
307	9-10	passe par le milieu de l'arc soutendu par un des côtés du polygone, *lisez* passe par un des sommets du polygone.
357	17	*remplacez* $\frac{\varpi}{4}$ *par* $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
369	14	*effacez* paradoxal
384	16	au lieu de coupent *mettez* occupent
408	6	au lieu de $\frac{3.5.6}{4}$, *lisez* $\frac{4^3}{3.5.6}$
Ibid,	10	*remplacez cette ligne par la formule* $x^2=s^2+\frac{s^4}{3}+\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{s^6}{6}+\frac{4.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{s^8}{8}$, etc.
418	1	*remplacez* tabulaire *par* nepérien
448	15	au lieu de $\{\ \}^{-\frac{1}{2}}$ *mettez* $\{\ \}^{\frac{1}{2}}$
480	5	*remplac.* $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ *par* $\frac{(n-2)(n-1)}{2}\varphi e^{\alpha}$
Ibid,	9	au lieu de $\frac{1-e^2}{2}$ *écrivez* $a=\frac{1-e^2}{2}$
531	16	au lieu de φy, *lisez* $\varphi'' y$
548	22	au lieu de obliques *mettez* rectangulaires
Ibid,	23	au lieu de rectangulaires *mettez* obliques
551	12	*remplacez* fig. 10 *par* fig. 11
555	19	au lieu de résultats *mettez* avantages
576	6	au lieu de dx *lisez* $2dx$
674	6	au lieu de comprise *mettez* conique

que l'expression du coefficient numérique de l'antépénultième terme se réduit à $\frac{m.m-1}{2}$, c'est-à-dire, au coefficient du troisième terme du développement; comme on peut faire pour chacun des autres termes un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire, on voit que les coefficiens numériques pris à distances égales des extrêmes sont égaux.

14. Si dans le développement de la puissance m d'un binome on veut avoir le coefficient numérique d'un terme au moyen du précédent, il faudra, en désignant le rang de ce dernier par n, multiplier son coefficient par $\frac{m-n+1}{n}$, ce facteur diminue évidemment à mesure qu'on s'éloigne du premier terme du développement: d'où il résulte que les coefficiens numériques à compter du premier terme, ne croîtront qu'autant que ce facteur conservera une valeur plus grande que l'unité, et qu'ils décroîtront aussitôt que sa valeur sera au-dessous. Si on réfléchit à la manière dont ce facteur décroît, on verra facilement que les coefficiens numériques doivent reparaître passé un certain terme, et précisément dans un ordre rétrograde à celui dans lequel ils se sont présentés, c'est-à-dire, que les coefficiens nu-

mériques des termes pris à distances égales des extrêmes, doivent être égaux, puisque celui du premier terme et du dernier le sont. Pour s'assurer de cette vérité, il suffit d'observer que puisqu'il faut multiplier le coefficient du terme du rang n par $\frac{m-n+1}{n}$ pour avoir celui du terme suivant, il faudra pour revenir de celui-ci à celui-là, diviser ce dernier par $\frac{m-n+1}{n}$, ou, ce qui revient au même, le multiplier par $\frac{n}{m-n+1}$: cela posé, si dans le premier facteur on substitue successivement pour n les nombres, 1, 2, 3, etc.; et dans le second, pour la même lettre les nombres m, $m-1$, $m-2$, etc. l'un et l'autre deviendront égaux à m, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, etc.; d'où l'on voit, à cause que le coefficient du premier terme est égal à celui du dernier, que celui du second sera égal à celui du pénultième, que celui du troisième sera égal à celui de l'antépénultième, et ainsi de suite. C'est ce qui résulte d'ailleurs de ce que le développement de $(x+a)^m$ reste identiquement le même lorsqu'on change x en a et a en x, et de ce que les derniers termes, après cette opération se changent dans les premiers et réciproquement.

15. Lorsqu'on élève un binome à une puissance entière et positive représentée par m, le coefficient d'un terme qui en laisse n après lui est égal au nombre des produits différens qu'on peut former avec un nombre m de lettres en les prenant n à n, et comme le nombre de ces produits est un nombre entier, il en résulte que chaque coefficient est aussi un nombre entier; de plus, chacun d'eux étant exprimé par une fraction dont le numérateur est le produit de plusieurs nombres consécutifs, et le dénominateur le produit d'autant de facteurs de la suite naturelle 1, 2, 3... qu'il y a de facteurs au numérateur; il s'ensuit que le produit d'un nombre quelconque de facteurs consécutifs est toujours divisible par celui d'autant de facteurs continus de la suite naturelle des nombres, qu'il y a de facteurs au numérateur, puisqu'une semblable fraction peut toujours être regardée comme un des coefficiens du développement d'une puissance d'un binome dont le degré est marqué par le plus grand des facteurs qui se trouvent au numérateur; c'est d'ailleurs ce qui se peut démontrer directement et d'une manière fort simple, car si p est le plus petit des facteurs qui se trouvent au numérateur, que n soit leur nombre et que s représente un quelconque des facteurs premiers

du dénominateur, il faudra nécessairement que ce facteur se trouve parmi ceux du numérateur, car si s ne divise point p, il faudra qu'il divise un des facteurs $p+1, p+2, p+3, \ldots p+n-1$, puisque le multiple de s immédiatement supérieur à celui qui se trouve dans. p ne peut surpasser le nombre p d'une quantité plus grande que $s-1$, et à plus forte raison d'une quantité plus grande que $n-1$, puisque le plus grand des facteurs premiers qui se trouvent au dénominateur, ne peut surpasser le nombre n; par conséquent aucun facteur premier ne peut se trouver au dénominateur, sans qu'il ne se trouve au numérateur; de plus, aucun des facteurs simples du dénominateur ne peut se trouver au numérateur un plus petit nombre de fois qu'au dénominateur: car si on désigne par α le nombre des termes de la suite $1, 2, 3 \ldots, n$ qui sont divisibles par s sans être divisibles par des puissances de s supérieures à la première; par β le nombre des termes de la même suite qui sont divisibles par s^2, sans l'être par des puissances de s supérieures à la seconde; par γ le nombre des termes qui sont divisibles par s^3 sans l'être par des puissances plus élevées que la troisième, et ainsi de suite, l'exposant de s dans le dénominateur

sera égal à $\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots$. Mais il est facile de voir qu'il y a au numérateur au moins autant de facteurs qui sont divisibles par s, s^2, s^3, etc. qu'il y en a au dénominateur ; par conséquent l'exposant de s dans le numérateur ne pourra être moindre que $\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots$; ce que nous venons de dire par rapport à s pouvant se dire par rapport à tout autre facteur premier du dénominateur, il en résulte que le numérateur contient tous les facteurs simples du dénominateur, a des puissances au moins aussi élevées qu'au dénominateur, de sorte que la division de l'un par l'autre doit nécessairement s'effectuer exactement.

16. On aurait pu s'assurer encore de l'exactitude de ce théorème, en observant que $\frac{m.m-1\ldots m-n+1}{1.2\ \ldots\ n}$ qui est l'expression du coefficient du terme général de la puissance m d'un binome peut être considérée comme résultant du produit de $\left(1+\frac{m-n}{n}\right)$ par $\frac{m-1\ldots m-n+1}{1.2\ldots n-1}$ et par conséquent comme étant composé de deux parties, dont l'une serait $\frac{m-1\ldots m-n+1}{1\ \ldots\ n-1}$, et dont l'autre serait $\frac{m-1\ldots\ m-n}{1\ \ldots\ n-1.n}$, et comme

celle-ci est le coefficient de même rang dans la puissance d'un degré moindre d'une unité, et que l'autre est le coefficient du terme qui le précède dans la même puissance; il en résulte que si dans le développement d'une puissance quelconque du binome, les coefficiens sont des nombres entiers, ceux du développement de la puissance d'un degré plus élevé d'une unité seront aussi des nombres entiers, et comme cela a lieu pour la seconde puissance, cela a lieu pour toutes les suivantes.

17. Si on retranche du développement de $(x+a)^m$ le dernier terme qui est a^m, tous les termes restans seront divisibles par x, et comme leur somme équivaut à l'excès de la puissance m de $x+a$ sur la même puissance de a, il en résulte que la différence des puissances semblables et entières de deux quantités est toujours divisible par la différence de ces quantités, ce qui s'accorde avec ce que donne la division, car si on divise $x^m - a^m$ par $x-a$, on aura pour le premier terme du quotient x^{m-1} et pour reste $a(x^{m-1} - a^{m-1})$; si donc $x^{m-1} - a^{m-1}$ est divisible par $x-a$, $x^m - a^m$ le sera aussi, et comme la divisibilité de $x^{m-1} - a^{m-1}$ se ramènera à celle de $x^{m-2} - a^{m-2}$, et ainsi de suite; il en résulte

à cause que $x^2 - a^2$ est divisible par $x - a$, que $x^3 - a^3$ le sera aussi, et en allant de proche en proche, que $x^m - a^m$ le sera pareillement.

La démonstration que nous venons de donner de la formule du binome a toute la simplicité qu'on peut desirer, et se trouve dégagée de la théorie des combinaisons qu'on avait coutume d'y introduire; quoique cette théorie considérée en elle-même soit très-importante, et que la démonstration dont il s'agit offre l'occasion d'en faire une des belles applications, on ne peut disconvenir que cette marche ne soit non-seulement tout à-fait indirecte, mais encore qu'elle a l'inconvénient de faire perdre de vue l'objet principal qu'on se propose, et qu'il doit être préférable de n'employer pour y arriver que des principes qui dérivent de la nature même de la chose. C'est aussi ce qu'ont senti plusieurs auteurs d'élémens qui l'ont introduite, les uns en partie, les autres en totalité dans leurs livres, ainsi qu'une partie de ce qui suit : on la trouve exposée pour la première fois dans l'ouvrage que j'ai publié en 1806, et qui a paru avec un nouveau titre en 1809.

18. Après avoir considéré le produit de plusieurs facteurs binomes dont les premiers termes

étaient égaux entr'eux, nous allons considérer celui des facteurs réciproques de ces mêmes binomes, et voir de quelle manière les seconds termes de chacun d'eux entrent dans la composition des différens termes du produit de ces facteurs.

19. Soient $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... un nombre quelconque de binomes qui ont un même premier terme, $\frac{1}{x-a}$; $\frac{1}{x-b}$, $\frac{1}{x-c}$, ... leurs facteurs réciproques; si on multiplie chacun d'eux par x, ou qu'on les développe successivement en séries, on aura

$$\frac{x}{x-a} = 1 + ax^{-1} + a^2x^{-2} + a^3x^{-3} + \text{etc.}$$

$$\frac{x}{x-b} = 1 + bx^{-1} + b^2x^{-2} + b^3x^{-3} + \text{etc.}$$

$$\frac{x}{x-c} = 1 + cx^{-1} + c^2x^{-2} + c^3x^{-3} + \text{etc.}$$

.....

Si on multiplie toutes ces équations entre elles, il en résultera un produit dont le premier terme sera l'unité, et dont tous les autres seront affectés de puissances entières et négatives de x. Si on ordonne les termes de ce produit par rapport aux puissances ascendantes et négatives de cette variable, il est facile de voir

que le coefficient du second terme sera égal à la somme des seconds termes des binomes pris avec des signes contraires; que le coefficient du troisième terme sera égal à la somme des produits de deux dimensions qu'on peut former avec les seconds termes des binomes pris avec des signes contraires; que le coefficient du quatrième terme sera égal à la somme des produits de trois dimensions qu'on peut former avec les seconds termes des binomes pris avec des signes contraires; et en général, que le coefficient d'un terme quelconque sera égal à la somme des produits d'autant de dimensions qu'il est marqué par le nombre des termes qui le précèdent, et qu'on peut former avec les seconds termes des binomes pris avec des signes contraires : c'est ce qu'il est facile de démontrer; car si on représente par $a^{\lambda} x^{-\lambda}$; $b^{\mu} x^{-\mu}$; $c^{\nu} x^{-\nu}$, ... les termes généraux des premières, secondes, troisièmes..... séries, le coefficient affecté de x^{-n} dans le produit de toutes ces séries, se composera d'autant de termes de la forme $a^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu}$.... qu'on pourra satisfaire de fois en nombres entiers et positifs à l'équation

$$\lambda + \mu + \nu + \ldots = n.$$

par conséquent le coefficient de x^{-n} dans le produit des facteurs précédens est égal à la somme des produits de n dimensions qu'on peut former avec les seconds termes des binomes pris avec des signes contraires ; mais ce même coefficient est celui de x^{-m-n} dans le produit des m facteurs $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{x-b}$, $\frac{1}{x-c}$..... il s'ensuit donc qu'en quelque nombre que soient les facteurs de cette forme que l'on multiplie, le produit se composera toujours d'un nombre infini de termes dans lesquels toutes les puissances entières et négatives de x se trouveront à partir de celle dont l'exposant, pris positivement, marque le nombre des facteurs : de plus, le coefficient d'un terme quelconque se composera de tous les produits dont le nombre des dimensions est marqué par le nombre des termes qui précèdent et qu'on peut former avec les seconds termes des binomes pris avec des signes contraires.

20. On pourrait démontrer les mêmes choses en faisant des raisonnemens analogues à ceux qu'on a faits dans les art. 2 et suivans, ou en faisant voir que si la composition des coefficiens est telle que nous l'avons énoncée lorsque l'on considère un nombre m de facteurs,

elle a encore lieu lorsqu'on en considère un de plus ; mais comme ces différentes manières de présenter les mêmes choses n'offrent aucune difficulté et que d'ailleurs elles ne conduisent à rien de plus, nous ne nous y arrêterons point.

Application de la théorie des produits successifs à la démonstration du binome pour le cas de l'exposant entier et négatif.

21. Si dans le produit des facteurs $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{x-b}$, $\frac{1}{x-c}\ldots$, on suppose que les seconds termes des binomes soient égaux à a et qu'ils soient en nombre m, on aura le développement de $(x-a)^{-m}$: or le coefficient du second terme du produit étant la somme des seconds termes des binomes pris en signes contraires, et ces seconds termes étant égaux à a, leur somme sera égale à $-ma$, par conséquent le coefficient du second terme sera égal à ma.

22. Le coefficient du troisième terme étant la somme des produits de deux dimensions qu'on peut former avec les lettres a, b, c....., sera égal à a^2 pris autant de fois qu'on peut former

de ces produits ; or le nombre des produits de deux dimensions qu'on peut former avec les m lettres a, b, c, d....., se compose de tous les produits de cette dimension dans lesquels se trouve la lettre a, et de ceux dans lesquels cette même lettre ne se trouve pas, c'est-à-dire de ceux qu'on peut former avec les m autres lettres b, c, d..... : or les produits de deux dimensions dans lesquels la lettre a se trouve, sont au nombre de m, puisqu'ils se forment du produit de la lettre a, par chacune des lettres a, b, c ....; de même les produits de deux dimensions qu'on peut former avec les $m-1$ lettres b, c, d..... se composent des produits de deux dimensions dans lesquels se trouve la lettre b et de ceux qu'on peut former avec les $m-2$ autres lettres c, d.....; et ainsi de suite. Or le nombre des produits dans lesquels se trouve la lettre b, étant au nombre de $m-1$, ceux dans lesquels se trouve la lettre c seront au nombre de $m-2$, et ainsi de suite; par conséquent le nombre total des produits de deux dimensions qu'on peut former avec les m lettres a, b, c, d..... sera égal à la somme des termes de la suite.

$$m,\ m-1,\ m-2,\ m-3\ldots 4,\ 3,\ 2,\ 1.$$

Mais les termes de cette suite sont ceux d'une progression par différence; ainsi on pourrait en conclure tout de suite, que le coefficient du second terme est égal à a^s multiplié par la demi-somme du produit des extrêmes par le nombre des termes, c'est-à-dire égal à $\frac{m.m+1}{2}a^s$: mais pour suivre ici la marche uniforme que nous emploierons pour la sommation des suites auxquelles nous ramènerons la recherche des coefficiens numériques des autres termes, nous remarquerons que si on considère la somme des deux derniers termes, on aura $1+2=2\left(1+\frac{1}{2}\right)$ $=\frac{2.3}{2}$. Si à ce résultat on ajoute le terme qui précède les deux derniers, la somme des trois derniers termes sera égale à $\frac{2.3}{2}+3$, ou ce qui revient au même, à $3\left(1+\frac{2}{2}\right)=\frac{3.4}{2}$. Si à ce résultat on ajoute le terme qui précède les trois derniers, la somme des quatre derniers termes de la série sera égale à $\frac{3.4}{2}+4$ ou à $4\left(1+\frac{3}{2}\right)$, ou ce qui revient au même à $\frac{4.5}{2}$. En continuant de procéder de la même manière, on trouvera que la somme des cinq derniers termes est

égale à $\frac{5.6}{2}$, que celle des six derniers est égale à $\frac{6.7}{2}$, et qu'en général la somme des k derniers termes de la série sera égale à $\frac{k.k+1}{2}$. Si la somme des $k-1$ derniers est égale à $\frac{k-1.k}{2}$, car la somme des $n-1$ derniers termes étant égale à $\frac{k-1.k}{2}$, celle des n derniers sera égale à $\frac{k-1.k}{2}+k$ ou à $k\left(1+\frac{k-1}{2}\right)$, c'est-à-dire égale à $\frac{k.k+1}{2}$. Si donc l'expression précédente donne la somme des deux derniers termes, elle donnera celle d'un nombre quelconque de termes; et comme elle donne effectivement celle des deux derniers termes en y faisant $k=2$, elle donnera aussi celle de tant de termes qu'on voudra; par conséquent la somme de tous les termes sera exprimée par $\frac{m.m+1}{2}$.

23. Le coefficient du quatrième terme étant la somme des produits de trois dimensions qu'on peut former avec les lettres a, b, c, d..., devient égal dans l'hypothèse où tous les facteurs sont égaux au premier d'entr'eux, à, autant de fois a^3, qu'on peut former de produits de trois

dimensions avec les m lettres a, b, c, d..... or le nombre de ces produits se compose du nombre de ces mêmes produits dans lesquels la lettre a se trouve, et du nombre de ceux dans lesquels cette même lettre ne se trouve pas, ou, ce qui revient au même, du nombre des produits de cette dimension qu'on peut former avec les $m - 1$ autres lettres b, c, d..... Si donc on désigne par C_m le nombre des produits de trois dimensions qu'on peut faire avec m lettres, et par C_{m-1} le nombre de ceux qu'on peut faire avec $m-1$ lettres, il est facile de voir en observant qu'il y a autant de produits de trois dimensions dans lesquels se trouve la lettre a, qu'on peut former de produits de deux dimensions avec les m lettres a, b, c, d..., qu'on aura les équations suivantes

$$C_m = \frac{m.m+1}{2} + C_{m-1}$$

$$C_{m-1} = \frac{m-1.m}{2} + C_{m-2}$$

$$C_{m-2} = \frac{m-2.m-1}{2} + C_{m-3}$$

.....

d'où l'on tire

$$C_m = \frac{m.m+1}{2} + \frac{m-1.m}{2} + \ldots + \frac{2.3}{2} + \frac{1.2}{2}.$$

Si on considère les deux derniers termes de cette suite, on aura

$$\frac{2.3}{2}+\frac{1.2}{2}=\frac{2.3}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2.3.4}{2.3};$$

si à cette expression on ajoute le troisième terme, en commençant par les derniers, la somme des trois derniers termes sera exprimée par

$$\frac{4.3}{2}+\frac{2.3.4}{2.3}=\frac{3.4}{2}\left(1+\frac{2}{3}\right)=\frac{3.4.5}{2.3};$$

en allant de proche en proche il est facile de voir que l'expression des k derniers termes sera exprimée par $\frac{k.k+1.k+2}{2.3}$, si celle des $k-1$ derniers l'est par $\frac{k-1.k.k+1}{2.3}$; car si à cette dernière quantité on ajoute $\frac{k.k+1}{2}$ on aura

$$\frac{k.k+1}{2}\left(1+\frac{k-1}{2}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{k.k+1.k+2}{2.3};$$

et comme l'expression $\frac{k-1.k.k+1}{2.3}$ donne la somme des deux derniers termes lorsqu'on y fait

MÉLANGES D'ANALYSE

ET

DE GÉOMÉTRIE.

MÉLANGES D'ANALYSE.

Théorie des produits successifs.

1. Cette Théorie a pour objet de déterminer la loi suivant laquelle les coefficiens des termes de plusieurs polynomes ordonnés par rapport aux puissances successives d'une même variable, entrent dans la composition des différens termes du produit de ces polynomes, et d'exposer les conséquences qui en résultent; elle est une des plus importantes de l'analyse algébrique, tant par l'étendue des objets qu'elle embrasse, que par la facilité qu'elle apporte dans l'exposition de plusieurs théories. Notre objet dans ce moment n'est point de la développer dans toute

sa généralité, ni d'en montrer les nombreuses applications; nous nous réservons de revenir sur ce sujet et de le traiter avec toute l'étendue qu'exige l'importance de cette matière. Dans ce qui va suivre nous nous occuperons seulement de rechercher la loi suivant laquelle les seconds termes de plusieurs facteurs binomes qui ont un même premier terme, entrent dans la composition des coefficiens des puissances successives de ce premier terme; après quoi nous développerons les conséquences qui en résultent, et nous verrons naître du développement de ces mêmes conséquences, le germe de plusieurs théories générales dont la liaison sera tellement établie par celles qui les précéderont, qu'elles paraîtront en découler comme de simples corollaires.

2. Considérons d'abord le produit d'un nombre m de facteurs binomes $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots$ Ce produit, quel qu'il soit, doit évidemment contenir toutes les puissances successives de x, depuis celle dont l'exposant indique le nombre des binomes, jusqu'à celle où cet exposant est zéro; ainsi la forme générale de ce produit sera

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots\ldots + A_m.$$

Pour déterminer les coefficiens, concevons que les seconds termes des facteurs qui suivent le premier, deviennent nuls. Ce produit se réduira évidemment à celui de $x+a$ par x^{m-1}: ainsi dans l'hypothèse actuelle A_1 se réduira à a; mais comme ce produit reste le même en changeant les lettres les unes dans les autres, il faut nécessairement qu'elles entrent toutes de la même manière dans les coefficiens. Ainsi puisque A_1 contient a, il doit contenir b, c, d...; et comme il ne peut d'ailleurs s'y trouver que des termes d'une seule dimension, il en résulte que ce coefficient est la somme des seconds termes des binomes.

3. Si on suppose que les seconds termes des facteurs qui viennent après les deux premiers deviennent nuls, le produit se réduira à celui de $x+a$ par $x+b$ par x^{m-2}; et A_2 coefficient de x^{m-2} se réduira à ab; mais puisque toutes les lettres doivent y entrer de la même manière, il s'ensuit que parmi les m lettres, a, b, c, d.... on ne peut en prendre deux dont le produit ne se trouve dans A_2, et comme ce coefficient ne peut contenir aucun produit de plus de deux dimensions, et que d'ailleurs ils sont tous rationnels, il en résulte que ce coefficient est la somme des

produits différens qu'on peut former avec les m lettres $a, b, c, d\ldots$, en les prenant deux à deux.

4. Si l'on suppose que les seconds termes des facteurs qui viennent après les trois premiers deviennent nuls, le produit se réduira à celui de $x+a$ par $x+b$ par $x+c$ par x^{m-3}, et A, coefficient de x^{m-3}, se réduira à abc. Ainsi, par des raisons semblables à celles qui ont déjà été rapportées, on voit que ce coefficient est la somme des produits différens qu'on peut former avec les m seconds termes $a, b, c, d\ldots$, en les prenant trois à trois, et ainsi de suite jusqu'au dernier terme A_m qui est le produit des m seconds termes, puisque c'est à cela que se réduit le produit lorsqu'on fait $x=0$.

5. Ce qui précède montre bien clairement la loi suivant laquelle les seconds termes des facteurs binomes entrent dans la composition des différentes puissances du premier terme de ces binomes, puisque le raisonnement fait sur les trois premiers termes du produit peut se continuer indéfiniment, pour en montrer toute la généralité. Supposons qu'il s'agisse de trouver le coefficient de x^{m-n}, ce coefficient lorsqu'on suppose que les seconds termes d'un nombre $m-n$

de binomes deviennent nuls, se réduit au produit des seconds termes de tous les autres; mais ce coefficient ne peut se réduire au produit des seconds termes de ces n facteurs après l'hypothèse faite sur les $m-n$ autres, à moins qu'il n'y eût été avant cette hypothèse, par conséquent le coefficient de x^{m-n} doit essentiellement contenir tous les produits différens qu'on peut former avec les m lettres $a, b, c, d\ldots$, en les prenant n à n; et comme il ne peut contenir que des termes de cette dimension sans mélange de puissances de cette même lettre plus élevée que la première et sans diviseur, il en résulte que ce coefficient est nécessairement la somme de tous les produits différens qu'on peut former avec les seconds termes des binomes en les prenant n à n.

Application de la théorie des produits successifs à la démonstration de la formule du binome pour le cas de l'exposant entier et positif.

6. Si dans le produit d'un nombre m de facteurs binomes qui ont un même premier terme, on suppose que les seconds termes de ces binomes deviennent tous égaux à a, et que

l'on apporte dans le produit de ces binomes, les changemens qui sont relatifs à cette supposition, on aura le développement de la puissance m de $x + a$; or le coefficient du second terme du produit étant la somme des seconds termes des binomes, et chacun de ces seconds termes étant égal à a, leur somme et par conséquent le coefficient du second terme sera égal à a pris autant de fois qu'il y a de binomes, c'est-à-dire égal à ma.

7. Le coefficient du troisième terme étant la somme des produits des seconds termes pris deux à deux, sera égal à a^2 répété autant de fois que ce coefficient contient de produits deux à deux; or parmi ces produits il y en a évidemment $m-1$ dans lesquels la lettre a se trouve, puisqu'elle doit se trouver avec chacune des autres lettres b, c, d,... Mais comme toutes ces lettres doivent entrer de la même manière dans les coefficiens, il y a nécessairement $m-1$ termes dans lesquels se trouve la lettre b, même nombre dans lesquels se trouve la lettre c, et ainsi de suite pour les autres lettres. Ainsi en comptant successivement le nombre des termes dans lesquels se trouve chaque lettre, on en trouvera en tout $m.m-1$; or en comp-

tant les termes dans lesquels se trouvait la lettre a, on a pris le terme ab une fois, mais on l'a repris une seconde fois, en comptant ceux dans lesquels se trouvait la lettre b, il a donc été pris deux fois; il en est de même de tous les autres. Ainsi le nombre des produits différens n'est que la moitié du nombre des termes comptés, c'est-à-dire $\frac{m.m-1}{2}$, par conséquent le coefficient du terme dont il s'agit est égal à $\frac{m.m-1}{2}a^2$.

8. Le coefficient du quatrième terme étant la somme des produits différens qu'on peut former avec les lettres a, b, c, $d\ldots$, en les prenant trois à trois, devient dans l'hypothèse actuelle égal à a^3 pris autant de fois qu'il y a de ces produits: or le nombre des termes dans lesquels se trouve la lettre a est évidemment égal au nombre des produits différens qu'on peut former avec les lettres b, c, $d\ldots.$, en les prenant deux à deux; car si parmi les produits deux à deux de ces $m-1$ lettres il y en avait qui ne fussent point multipliés par a, il y aurait dans A_3 des produits de trois lettres qui ne s'y trouveraient point, et ce coefficient ne serait point la somme des pro-

duits différens qu'on peut former avec les seconds termes des binomes, en les prenant trois à trois, ce qui ne peut être ; or le nombre des produits différens qu'on peut former avec $m-1$ lettres, en les prenant deux à deux, est $\frac{m-1 \cdot m-2}{2}$, ainsi $\frac{m-1 \cdot m-2}{2}$ sera le nombre des termes dans lesquels se trouve la lettre a; mais comme toutes les lettres doivent y entrer de la même manière, il s'ensuit qu'en comptant les termes dans lesquels se trouvent successivement les lettres b, c, d..., on en trouvera un pareil nombre pour chacune d'elles ; et qu'ainsi le nombre des termes comptés sera exprimé par $\frac{m.m-1.m-2}{2}$, mais en comptant les termes de cette manière, chacun d'eux a été pris autant de fois qu'il contient de lettres, c'est à-dire trois fois, ainsi le nombre des produits différens dont il s'agit n'est que le tiers du nombre des termes comptés, c'est-à-dire $\frac{m.m-1.m-2}{2.3}$; par conséquent le coefficient du quatrième terme sera $\frac{m.m-1.m-2}{2.3}a^3$.

9. Comme un raisonnement analogue peut se faire pour chacun des autres termes, on conçoit que le coefficient de x dans un terme

quelconque du développement dont il s'agit, doit être égal à une puissance de a marquée par le nombre des termes qui sont avant lui, multipliée par le rapport du produit des exposans de x dans les termes précédens au produit des exposans de la lettre a, dans les termes qui suivent le premier, et par celui de cette même lettre, dans le terme que l'on considère. Mais pour ne rien laisser à desirer sur ce sujet, et afin de comprendre dans un seul raisonnement tous ceux qu'on pourrait faire sur les autres termes, supposons qu'on ait étendu celui qui a été fait sur les trois premiers termes jusqu'à celui qui est affecté de x^{m-n}, et qu'on ait reconnu que la composition du coefficient numérique de ce terme se forme d'après la loi énoncée, il est facile de voir qu'on pourra l'étendre encore au terme suivant, et que la composition de ce nouveau coefficient se formera suivant la même loi; en effet, si dans le produit des m facteurs $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots$ on suppose que les seconds termes soient égaux à a, le coefficient de x^{m-n} sera égal à autant de fois a^n qu'on peut former de produits différens avec les m seconds termes $a, b, c, d\ldots$, en les prenant n à n. Or, le nombre des produits n à n, dans lesquels se

trouve la lettre a, est égal au nombre des produits $n-1$ à $n-1$, qu'on peut former avec les $m-1$ autres lettres b, c, d... Ainsi puisque le nombre des produits différens qu'on peut former avec m lettres, en les prenant $n-1$ à $n-1$, est égal au coefficient numérique du terme précédent, et que d'ailleurs ce coefficient est égal à $\frac{m.m-1....m-n+2}{1\ .\ 2\qquad\qquad n-1}$; il en résulte que le nombre des produits qu'on peut former avec $m-1$ lettres, en les prenant $n-1$ à $n-1$, sera égal à $\frac{m-1.m-2....m-n+1}{1\ .\ 2\ ....\ n-1}$, et que cette quantité exprimera le nombre des termes dans lesquels se trouve la lettre a : si on comptait de la même manière le nombre des termes dans lesquels se trouve la lettre b, on en trouverait le même nombre, et ainsi des autres; ainsi puisqu'il y a m lettres en tout, le nombre total des termes comptés sera

$$\frac{m.m-1.m-2....m-n+1}{1\ .2\ .\ 3\ .....\ n-1};$$

mais en comptant les termes de cette manière, chacun d'eux a été compté autant de fois qu'il contient de lettres, c'est-à-dire n fois; par conséquent le nombre des produits différens n'est que la $n^{ième}$ partie du nombre des termes comptés,

c'est-à-dire égal à

$$\frac{m.m-1.m-2....m-n+1}{1\ .2\ .3\ .....n-1.\ n}.$$

Ainsi, pourvu que la composition du coefficient d'un terme ait été établie suivant la loi énoncée, celle du coefficient du terme suivant s'ensuit nécessairement, et commenous avons vu qu'elle avait lieu pour les trois termes qui suivent immédiatement le premier, elle a lieu pour tous les autres; ainsi on aura pour toutes les valeurs entières et positives, de l'exposant m

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}a^2x^{m-2} + \text{etc.....}$$

La formule dont nous venons de parler est d'un usage très-fréquent dans l'analyse; elle y est connue sous le nom de *formule du binome de Newton.*

10. L'expression du terme général de la formule du binome comparée à celle du terme qui le précède immédiatement, fait voir que si on représente par P le coefficient numérique du terme affecté de $a^{n-1}x^{m-n+1}$, celui du terme suivant sera égal à $P\frac{m-n+1}{n}$; par conséquent le coefficient numérique d'un terme quelconque s'obtiendra en multipliant celui du coefficient du

terme précédent par l'exposant de x dans ce terme, et divisant le produit par le nombre des termes qui précèdent celui que l'on considère; c'est d'ailleurs ce qu'on peut encore voir autrement, car si on prend un produit de $n-1$ lettres, et qu'on le multiplie successivement par chacune des autres, on aura $m-n+1$ produits de n lettres. Ainsi on aura autant de fois $m-n+1$ produits de n lettres qu'il y a de produits de $n-1$ lettres. Si donc on désigne par P le nombre des produits différens de $n-1$ lettres, le nombre des produits de n lettres qu'on aura formé de cette manière, sera égal à P $(m-n+1)$. Or parmi les produits de $n-1$ lettres se trouvent ceux qu'on obtiendrait en divisant un produit de n lettres successivement par chacune d'elles; ainsi chacun de ces produits de $n-1$ lettres se trouvant multiplié par les lettres qu'il ne renferme point, il faut nécessairement que chacun d'eux reproduise le produit de n lettres dont on vient de parler; et comme les produits de $n-1$ lettres, provenant de la suppression d'un facteur dans un produit de n lettres, sont au nombre de n, il faut nécessairement que chaque produit de n lettres se trouve répété autant de fois qu'il contient de lettres, c'est-à-dire n fois; par conséquent le nombre des produits diffé-

rens qu'on peut former avec m lettres, en les prenant n à n, et par suite le coefficient numérique du terme affecté de $a^n x^{m-n}$ est égal à $P\frac{m-n+1}{n}$.

11. Si on voulait avoir la somme des coefficiens numériques de cette formule, il suffirait de faire $a=1$ et $x=1$, puisque cette hypothèse réduit chaque terme de ce développement à son coefficient, et comme le premier membre dans cette même hypothèse est égal à 2^m, il s'ensuit que la somme des coefficiens du développement d'une puissance quelconque d'un binome est égale à une puissance de 2 marquée par le degré de cette puissance.

12. Au moyen de la formule précédente l'élévation d'un binome à une puissance quelconque se trouve ramenée à effectuer sur des nombres des opérations qui deviennent en quelque sorte mécaniques, et qui dispensent de passer par les puissances inférieures de cette même quantité; on peut encore diminuer le travail en observant que les coefficiens des termes pris à distances égales des extrêmes sont égaux; de sorte qu'il suffit d'avoir calculé la moitié des coefficiens pour avoir les autres, lorsque m est impair ou ceux de la moitié des termes

plus un lorsque m est pair. Cette vérité est une suite nécessaire de la manière dont les seconds termes des binomes entrent dans la composition des différentes puissances de x. En effet, si on divise le produit des seconds termes successivement par chacun d'eux, et que l'on réunisse les résultats, on aura la somme des produits des seconds termes pris $m-1$ à $m-1$; il y aura donc autant de produits $m-1$ à $m-1$ qu'il y a de seconds termes ; or le nombre des produits $m-1$ à $m-1$ et le nombre des seconds termes sont respectivement égaux aux coefficiens numériques de l'avant-dernier terme et du second; ainsi ces coefficiens sont égaux. Si on divise le produit $abcd\ldots$ des seconds termes successivement par chacun des produits différens qu'on peut former avec les m lettres, en les prenant deux à deux, on aura les produits des m lettres prises $m-2$ à $m-2$; ainsi les produits $m-2$ à $m-2$ sont en même nombre que les produits deux à deux ; par conséquent les coefficiens numériques de l'antépenultième terme et du troisième terme sont égaux; en général si on considère un terme qui ait un nombre n de termes après lui, son coefficient numérique sera égal au nombre des produits différens qu'on peut

former avec m lettres a, b, c..... en les prenant $m - n$ à $m - n$. Or on obtient tous les produits de $m - n$ lettres en divisant le produit des m lettres successivement par chacun des produits de n lettres ; ainsi il y a autant de produits de $m - n$ lettres qu'il y a de produits de n lettres, et comme le nombre des produits de n lettres est égal au coefficient numérique du terme qui en laisse n après lui, il en résulte que le coefficient numérique du terme qui en laisse n avant lui est égal à celui du terme qui en laisse n après lui, et que par conséquent les coefficiens numériques des termes pris à distances égales des extrêmes sont égaux.

13. Cette dernière conséquence est comme on voit une suite nécessaire des considérations qui ont été exposées plus haut; mais on peut y arriver sans y avoir recours : il suffit pour cela de ramener les fractions qui expriment les coefficiens des derniers termes à leur plus simple expression ; en effet le coefficient numérique d'un terme quelconque se composant du produit des exposans que se trouve avoir le premier terme du binome dans les termes précédens divisé par le produit des exposans du second terme du binome dans les mêmes termes, et dans celui du terme que l'on considère,

il en résulte que le coefficient du dernier terme sera exprimé par

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.\ldots\ldots 4.3.2.1}{1.2..3.4\ldots\ldots m-3.m-2.m-1.m};$$

Cela posé, si on veut avoir l'expression du coefficient de l'avant-dernier terme, il faudra supprimer dans le coefficient du dernier terme le facteur par lequel il a fallu multiplier celui qui le précède pour l'obtenir. Or le facteur m qu'on supprimera au dénominateur de l'expression du dernier terme, restera seul dans le numérateur après les réductions faites ; ainsi le coefficient de l'avant-dernier terme sera égal à celui du second, si on supprime dans l'expression de l'avant-dernier terme le facteur qu'on est obligé d'introduire dans celui qui le précède, afin de l'obtenir on aura le coefficient de l'antépénultième terme, il faudra donc supprimer au numérateur de l'expression du dernier terme les facteurs 1 et 2, et au dénominateur les facteurs m et $m-1$; mais les facteurs qu'on supprimera au numérateur resteront au dénominateur, et ceux qu'on supprimera au dénominateur resteront au numérateur et comme les autres, donnent l'unité par leur division, il en résulte que

fait $k=2$, elle donnera celle des trois derniers, et ainsi de suite, et par conséquent celle d'un nombre quelconque de termes successifs pris dans la suite, en commençant par les derniers.

24. Si on considère le coefficient du $(n+1)^{ième}$ terme, il est évident qu'il sera égal à a^n pris autant de fois qu'on peut former de produits de n dimensions avec un nombre m de lettres. Or les produits de n dimensions qu'on peut former avec les m lettres a, b, c, d, se composent des produits de la lettre a par tous les produits de $n-1$ dimensions qu'on peut former avec les m lettres a, b, c, d..... et des produits de n dimensions qu'on peut former avec les $m-1$ lettres b, c, d, ... Si donc on désigne par n_m le nombre des produits de n dimensions qu'on peut former avec m lettres, et par $\{n-1\}_m$ le nombre des produits de $n-1$ dimensions qu'on peut former avec m lettres, on aura

$$\begin{aligned} n_m &= \{n-1\}_m + n_{m-1} \\ n_{m-1} &= \{n-1\}_{m-1} + n_{m-2} \\ n_{m-2} &= \{n-1\}_{m-2} + n_{m-3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$n_m = \{n-1\}_m + \{n-1\}_{m-1} + \{n-1\}_{m-2} + \ldots$$

Ainsi la détermination du coefficient d'un terme quelconque est ramenée à trouver la somme d'une suite de termes de la forme du coefficient du terme qui le précède : si donc on suppose qu'on ait

$$(n-1)_m = \frac{m.m+1.m+2\ldots m+n-2}{1.2.3\quad\ldots\quad n-1};$$

on aura en écrivant la série à rebours

$$n_m = \frac{1.2\ldots n-1}{1.2\ldots n-1} + \frac{2.3\ldots n}{1.2\ldots n-1} + \ldots \frac{m\ldots m+n-2}{1\ldots n-1}.$$

Or la somme des deux premiers termes est égale à

$$\frac{2.3\ldots n}{1.2\ldots n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{2.3\ldots n+1}{1.2\ldots n-1.n},$$

si à ces deux termes on ajoute le suivant, la somme des trois premiers sera égale à

$$\frac{2\ldots n+1}{1\ldots n-1.n} + \frac{3.4\ldots n+1}{1.2\ldots n-1} = \frac{3.4\ldots n+1}{1.2\ldots n-1}\left(1+\frac{2}{n}\right),$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{3.4\ldots n+1.n+2}{1.2\ldots\quad n-1.n}.$$

On voit, sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, que si la somme des $k-1$ premiers termes

le [illegible]e suite est exprimée par

$$\frac{k-1.k\ldots n+k-2}{1\ .\ 2\ \ldots\ n-1.n}$$

celle d[illegible] premiers termes de la suite sera exprimée [illegible]

$$\frac{k-1.k.\ldots+k-2}{1\ .\ 2\ \ldots\ -1\ .\ n}+\frac{k.k+1\ldots n+k-2}{1.2.\ldots.\ n-1},$$

ou bien par

$$\frac{k.k+1\ldots+n-2}{1.\ldots\ldots\ldots n-1}\left(1+\frac{k-1}{n}\right),$$

ou enfin par

$$\frac{k.k+1.\ldots+n-2\ .\ k+n-1}{1\ .\ 2\ \ldots\ n-1\ .\ n}.$$

Si donc la formule [illegible] tablie pour un certain nombre de termes, [illegible] le sera encore quand on en considérera un [illegible] plus, et par conséquent pour un nombre [illegible] conque de termes; mais comme elle donn[illegible] somme des deux premiers termes, quan[illegible] fait $k=2$, il s'ensuit qu'elle donnera la [illegible].e de tant de termes qu'on voudra; ainsi le [illegible]icient du $n^{ième}$ terme du développement d[illegible] s'agit sera égal à

$$\frac{m.m+1.m+\ldots\ldots..m+n-1}{1\ .\ 2\ .\ \ldots\ \ldots\ n}a^n.$$

Ainsi la détermination du coefficient d'un terme quelconque est ramenée à trouver la somme d'une suite de termes de la forme du coefficient du terme qui le précède : si donc on suppose qu'on ait

$$(n-1)_m = \frac{m.m+1.m+2\ldots m+n-2}{1.2.3\quad\ldots\quad n-1};$$

on aura en écrivant la série à rebours

$$n_m = \frac{1.2\ldots n-1}{1.2\ldots n-1} + \frac{2.3\ldots n}{1.2\ldots n-1} + \ldots \frac{m\ldots m+n-1}{1\ldots\ldots n-1}.$$

Or la somme des deux premiers termes est égale à

$$\frac{2.3\ldots\ldots n}{1.2\ldots\ldots n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{2.3\ldots\ldots n+1}{1.2\ldots n-1.n},$$

si à ces deux termes on ajoute le suivant, la somme des trois premiers sera égale à

$$\frac{2\ldots\ldots n+1}{1\ldots n-1.n} + \frac{3.4\ldots n+1}{1.2\ldots n-1} = \frac{3.4\ldots n+1}{1.2\ldots n-1}\left(1+\frac{2}{n}\right),$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{3.4\ldots n+1.n+2}{1.2\ldots\quad n-1.n}.$$

On voit, sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, que si la somme des $k-1$ premiers termes

de cette suite est exprimée par

$$\frac{k-1.k\ldots n+k-2}{1\ .\ 2\ \ldots .n-1.n}$$

celle des k premiers termes de la suite sera exprimée par

$$\frac{k-1.k\ldots n+k-2}{1\ .\ 2\ \ldots n-1\ .\ n}+\frac{k.k+1\ldots n+k-2}{1\ .\ 2\ldots\ldots\ n-1},$$

ou bien par

$$\frac{k.k+1\ldots k+n-2}{1\ldots\ldots\ldots n-1}\left(1+\frac{k-1}{n}\right),$$

ou enfin par

$$\frac{k.k+1\ldots\ldots k+n-2\ .\ k+n-1}{1\ \ .\ \ 2\ \ldots\ldots\ \ n-1\ \ .\ \ n}.$$

Si donc la formule est établie pour un certain nombre de termes, elle le sera encore quand on en considérera un de plus, et par conséquent pour un nombre quelconque de termes; mais comme elle donne la somme des deux premiers termes, quand on y fait $k=2$, il s'ensuit qu'elle donnera la somme de tant de termes qu'on voudra; ainsi le coefficient du $n^{ième}$ terme du développement dont il s'agit sera égal à

$$\frac{m.m+1.m+2\ \ldots m+n-1}{1\ \ .\ \ 2\ \ .\ \ 3\ \ \ldots\ \ \ n}\,a^n.$$

On aura donc

$$(x-a)^{-m}=x^{-m}+max^{-m-1}+\frac{m.m+1}{2}a^2x^{-m-2}+\text{ etc.}$$

Par conséquent la formule du binome que nous n'avions démontrée que pour le cas de l'exposant entier et positif, se trouve aussi démontrée pour le cas de l'exposant entier et négatif.

25. On aurait pu se dispenser de recourir à la sommation des suites que nous avons considérées, et obtenir directement l'expression du terme général, en employant des considérations analogues à celles dont nous nous sommes servi pour le cas de l'exposant entier et positif, comme on le verra plus loin; mais la sommation de ces sortes de suites devant être pour nous d'un très-grand usage, j'ai cru devoir suivre cette marche, et montrer en même temps l'application qu'on en peut faire à la recherche des coefficiens du binome. On pourrait aussi en faire l'application à la recherche des coefficiens du binome lorsque l'exposant est positif; cela n'offre aucune difficulté, il suffit seulement pour cela de savoir que le coefficient numérique d'un terme dans une puissance de degré quelconque, est égal à

celui du terme de même rang dans la puissance d'un degré moindre d'une unité et du coefficient du terme précédent dans cette même puissance; c'est ce qu'il est facile de démontrer: pour le faire de la manière la plus simple, supposons qu'on ait

$$(1+z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots$$

et qu'on multiplie les deux membres par $1+z$ on aura

$$\begin{array}{r|l|l|l} (1+z)^{m+1} = 1 + A & z + B & z^2 + C & z^3 + \ldots\ldots\ldots \\ + 1 & + A & + B & + \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

par conséquent le coefficient d'un terme quelconque dans une puissance, se compose, comme nous l'avons dit, du coefficient de même rang, dans la puissance d'un degré moindre d'une unité et du coefficient du terme précédent.

26. Dans ce qui précède nous n'avons considéré que les puissances d'un binome dont le premier terme est l'unité, parce qu'une puissance quelconque de tout autre binome peut toujours s'y ramener, puisque, pour toutes les valeurs de m, on a,

$$(x+a)^m = x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m,$$

et parce que d'ailleurs il suffisait d'établir la loi

suivant laquelle ils se forment dans cette hypothèse, puisque ces coefficiens restent toujours les mêmes, quel que soit le premier terme du binome.

27. De la loi qui unit les coefficiens des termes d'une puissance avec ceux des termes d'une puissance inférieure d'une unité, il résulte que les coefficiens des termes d'une puissance quelconque sont des nombres entiers, si ceux de la puissance immédiatement inférieure d'une unité sont aussi des nombres entiers, et comme cela a lieu pour la première, cela a lieu aussi pour la seconde, pour la troisième, et en s'élevant de proche en proche, on voit que cela a lieu pour toutes les puissances entières et positives.

28. De cette même loi il résulte aussi que si dans une puissance les coefficiens des termes pris à distances égales des extrêmes sont égaux, ils le seront encore dans la puissance d'un degré plus élevé d'une unité, et, comme cela a lieu pour la première, cela aura encore lieu pour toutes les puissances entières et positives.

29. Il nous reste maintenant à faire voir comment on peut trouver les coefficiens des termes

du développement des puissances entières et négatives de $x - a$, sans avoir recours à la sommation des suites que nous avons employées plus haut.

30. Pour y arriver, nous observerons que le coefficient du second terme du produit des facteurs $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{x-b}$, $\frac{1}{x-c}$, etc. étant la somme des seconds termes des binomes pris avec des signes contraires, et ces seconds termes étant égaux à $-a$, leur somme prise en signe contraire sera égale à $+ma$.

31. Le coefficient du troisième terme étant égal à la somme des produits de deux dimensions qu'on peut former avec les seconds termes des binomes, sera égal dans l'hypothèse où tous les seconds termes sont égaux à $-a$, à autant de fois a^2 qu'on peut former de produits de deux dimensions avec les m lettres a, b, c, d, etc.; or le nombre des produits de deux dimensions qu'on peut former avec les m lettres a, b, c, d,... se compose du nombre de ceux dans lesquels se trouve la lettre a, et du nombre de ceux dans lesquels cette même lettre ne se trouve pas; mais le nombre de ceux dans lesquels la lettre a se trouve sont en nombre m, puisque cette lettre

doit être multipliée tant par elle-même que par chacune des autres, pour obtenir les produits de deux dimensions dans lesquels la lettre a ne se trouve pas; nous observerons que l'un quelconque de ces produits, tel que pq, par exemple, peut être considéré comme provenant du changement de a en p dans le produit aq, ou du changement de a en q dans le produit ap, de même p^2 peut être considéré comme provenant du changement de a en p dans a^2, ou du changement de a en p dans ap; et ainsi de suite. Par conséquent, si dans les produits de deux dimensions dans lesquels se trouve la lettre a, on change cette lettre successivement en b, c, d,..... on aura tous les produits de deux dimensions dans lesquels la lettre a ne se trouve pas, repétés deux fois; or le changement de a en b; c, d,..... dans chaque produit de deux dimensions en donnera $m-1$. Ainsi, puisqu'il y a m produits de deux dimensions dans lesquels se trouve la lettre a, on en aura en tout $m.m-1$; dans lesquels cette lettre ne se trouve pas, et comme les mêmes produits se trouvent répétés deux fois, et que d'ailleurs il ne peut y en avoir d'autres, il en résulte que le nombre total des produits de deux dimensions qu'on peut former avec les m lettres a, b, c, d, etc.; et par conséquent

le coefficient numérique du troisième terme de la puissance que l'on considère est égal à $m + \frac{m.m-1}{2}$, ou, ce qui revient au même à $\frac{m.m+1}{2}$.

32. Le coefficient du quatrième terme dans le produit des facteurs que l'on considère, étant la somme des produits de trois dimensions qu'on peut former avec les seconds termes des binomes, sera égal dans l'hypothèse où tous les seconds termes seraient égaux à a à autant de fois a^3 qu'on peut former de produits de trois dimensions avec les lettres a, b, c, d,....; or le nombre de ces produits se compose, du nombre de ceux dans lesquels la lettre a se trouve, et du nombre de ceux dans lesquels la lettre a ne se trouve pas, et comme les produits de trois dimensions dans lesquels la lettre a se trouve sont en même nombre que les produits de deux dimensions qu'on peut former avec les lettres a, b, c, d, ..., puisqu'ils résultent du produit de la lettre a par tous les produits de deux dimensions qu'on peut former avec les mêmes lettres; il en résulte que le nombre de ces produits est $\frac{m.m+1}{2}$; pour ob-

tenir les produits des trois dimensions dans lesquels ne se trouve pas la lettre a, on peut remarquer qu'un produit tel que bcd peut être considéré comme provenant du changement de a en b dans le produit acd, ou bien du changement de a en c dans abd, ou bien encore du changement de a en d dans abc. Il en est de même pour tout autre terme tel que b^2c, puisqu'on peut le regarder comme provenant du changement de a en b dans a^2c, ou de celui de a en b dans abc, ou encore de a en c dans ab^2; et ainsi de suite. Par conséquent, si dans les produits de trois dimensions qui renferment la lettre a, on change successivement a en b, c, d, etc., on aura le triple des produits de trois dimensions dans lesquels la lettre a ne se trouve pas. Or le changement de la lettre a dans chacune des autres lettres b, c, d,..... donne autant de fois $m-1$ produits de trois dimensions qu'il y a de produits de cette dimension dans lesquels se trouve la lettre a, et comme ces derniers sont au nombre de $\frac{m.m+1}{2}$, il s'ensuit que le nombre des produits différens où la lettre a n'entre pas, sera égal à $\frac{m-1.m.m+1}{2.3}$: si à ce nombre on ajoute

celui des produits de trois dimensions dans lesquels se trouve la lettre a, c'est-à-dire $\frac{m.m+1}{2}$, on aura le nombre total des produits de trois dimensions qu'on peut former avec les m lettres a, b, c, d,.....; or

$$\frac{m-1.m.m+1}{2.3}+\frac{m.m+1}{2}=\frac{m.m+1.m+2}{2.3};$$

par conséquent le coefficient numérique du quatrième terme sera

$$\frac{m.m+1.m+2}{2.3}.$$

33. Supposons, pour plus de généralité, qu'il s'agisse du coefficient du $(n+1)^{ième}$ terme, ce coefficient étant ce que devient la somme des produits de n dimensions qu'on peut former avec les lettres a, b, c, d, ... etc., lorsqu'on les suppose toutes égales entr'elles, est égal à autant de fois a^n qu'on peut former de ces produits; or parmi ces produits il y en a qui contiennent la lettre a et d'autres qui ne la contiennent pas, ceux qui contiennent la lettre a résultent du produit de cette lettre par tous les produits de $n-1$ dimensions qu'on peut former avec les lettres a, b, c, d,.....;

pour avoir les produits de n dimensions dans lesquels la lettre a ne se trouve pas, nous observerons qu'un produit tel que $b^p c^q d^r$ peut être considéré comme provenant du changement de la lettre a en b dans l'un ou l'autre des produits

$$a\ b^{p-1}\ c^q\ d^r,$$
$$a^2\ b^{p-2}\ c^q\ d^r,$$
$$a^3\ b^{p-3}\ c^q\ d^r,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^p\ c^q\ d^r;$$

ou bien du changement de a en c dans l'un ou l'autre des produits

$$a\ b^p\ c^{q-1}\ d^r,$$
$$a^2\ b^p\ c^{q-2}\ d^r,$$
$$a^3\ b^p\ c^{q-3}\ d^r,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^q\ b^p\ d^r;$$

ou bien encore comme provenant du changement de a en d dans l'un ou l'autre des produits

$$a\ b^p\ c^q\ d^{r-1},$$
$$a^2\ b^p\ c^q\ d^{r-2},$$
$$a^3\ b^p\ c^q\ d^{r-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^r\ b^p\ c^q;$$

et ainsi de suite, s'il se trouve un plus grand nombre de lettres, et comme ces produits de n dimensions sont les seuls qui, par le changement de a en b, c, d,..... donnent le produit $b^p c^q d^r$.....; il s'ensuit que si dans les produits de n dimensions dans lesquels la lettre a se trouve on change successivement a en b, c, d,..... on aura tous les produits de n dimensions dans lesquels la lettre a ne se trouve pas répétés autant de fois qu'il y a d'unités dans la somme des exposans, c'est-à-dire dans $p+q+r+\ldots$, et par conséquent n fois, puisque $p+q+r+\ldots=n$. Pour avoir le nombre de tous ces produits ainsi répétés, nous observerons que la substitution des lettres b, c, d,..... dans chacun des produits où se trouve la lettre a, en donnera autant qu'il y a de lettres b, c, d,..... et comme elles sont au nombre de $m-1$, on aura autant de fois $m-1$ produits de n lettres dans lesquels la lettre a ne se trouve pas qu'il y a de produits de n dimensions dans lesquels cette lettre se trouve; par conséquent, si on désigne par P le nombre des produits de n dimensions dans lesquels se trouve la lettre a, $\frac{P(m-1)}{n}$ sera le nombre des produits différens

dans lesquels cette lettre ne se trouve pas, de sorte que la somme des uns et des autres, c'est-à-dire le nombre total des produits de n dimensions qu'on peut former avec les m lettres a, b, c, d,...., etc., et par suite le coefficient numérique du $(n+1)^{ième}$ terme du développement de $(x-a)^{-m}$ sera égal à $P+P\left(\frac{m-1}{n}\right)$, ou, ce qui revient au même, à $P\left(\frac{m+n-1}{n}\right)$. Mais comme le nombre des produits de n dimensions dans lesquels la lettre a se trouve est le même que celui des produits de $n-1$ dimensions qu'on peut former avec les m lettres $a, b, c, d,...$, et que d'ailleurs le nombre de ces produits exprime le coefficient du terme qui précède celui qui est affecté de $a^n x^{-m-n}$, il en résulte, à cause que l'exposant de x dans le terme qui précède celui-ci est plus grand d'une unité, et que celui de a est moindre de la même quantité, que dans le cas de l'exposant entier et négatif, comme dans celui de l'exposant entier et positif, il faudra pour passer d'un terme au suivant multiplier le premier de ces deux termes par l'exposant de x dans ce même terme, et diviser par le nombre des termes qui précède, puis multiplier ce résultat par le

rapport du second terme du binome au premier terme de ce même binome.

34. De tout ce qui précède il suit que le résultat de la substitution de $m+n$ au lieu de m dans le développement de $(1+z)^m$, lorsque m est un nombre entier positif ou négatif, est précisément le même que le produit de deux séries dont l'une serait le développement de $(1+z)^m$, et dont l'autre serait celui de $(1+z)^n$, puisque $(1+z)^{m+n}=(1+z)^m.(1+z)^n$. On voit aussi que le résultat de la substitution de km au lieu de m dans la série qui donne le développement de $(1+z)^m$, est le même que si on multipliait un nombre k de séries toutes égales à celles qui expriment le développement de $(1+z)^m$ lorsque m est entier positif ou négatif. Si donc on veut repasser du développement de $(1+z)^{km}$ à celui de $(1+z)^m$, il suffira de diviser par k les premiers termes des facteurs qui forment les coefficiens des termes affectés des puissances successives de z dans le premier développement; il en serait de même si on avait à extraire de $(1+z)^{km}$ une racine d'un degré marqué par un des facteurs de l'exposant de la puissance, si la racine à extraire était d'un degré qui ne fût point un des facteurs de l'indice de la puissance; il est facile de voir que le résultat de la subs-

titution de $\frac{m}{n}$ au lieu de m dans le développement de $(1+z)^m$, serait encore intermédiaire entre les deux séries qui expriment les puissances entières de $(1+z)$ qui sont immédiatement au-dessus et au-dessous de $\frac{m}{n}$: de plus, si on suppose que cette fraction passe par tous les états de grandeur depuis un nombre entier jusqu'au nombre entier immédiatement supérieur, les résultats des diverses substitutions, dans la série, varieront aussi d'une manière insensible et dans le même sens que $(1+z)^{\frac{m}{n}}$, de manière à être toujours compris entre les valeurs des puissances entières de $1+z$ qui sont immédiatement supérieures et inférieures à $\frac{m}{n}$. Nous allons faire voir maintenant que les accroissemens de la série à mesure que $\frac{m}{n}$ augmente, correspondent précisément à ceux de $(1+z)^{\frac{m}{n}}$; de sorte que cette série qui n'est démontrée par ce qui précède, que pour le cas de l'exposant entier, le sera encore lorsque l'exposant sera fractionnaire, et par suite lorsqu'il sera un nombre quelconque rationnel ou irrationnel, positif ou négatif.

Démonstration

Démonstration de la formule du binome lorsque l'exposant est fractionnaire ou incommensurable, positif ou négatif.

35. Considérons la série indéfinie

$$1 + mz + \frac{m.m-1}{2} z^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} z^3 + \text{etc.};$$

et substituons-y successivement au lieu de m les quantités $n, p, q, \ldots\ldots$ on aura autant de séries semblables à la première qu'on aura fait de substitutions, en multipliant toutes ces séries entr'elles, et par la première, on obtiendra un produit dans lequel le premier terme sera l'unité et dont tous les autres seront multipliés par des puissances de z. Si on conçoit ce produit ordonné, par rapport aux puissances successives de cette quantité, les coefficiens de chaque puissance seront du degré de cette puissance, et comme la forme sous laquelle on peut mettre chacun d'eux est indépendante de la nature des quantités m, n, p, q, etc.; il en résulte que si on assigne la forme sous laquelle on peut les présenter lorsque $m, n, p, \ldots$ sont des nombres entiers, la même forme conviendra encore lorsque $m, n, p, \ldots\ldots$ seront quelconques; or,

lorsque m, n, p, etc. sont des nombres entiers, la première série exprime le développement de $(1+z)^m$; la deuxième celui de $(1+z)^n$; la troisième celui de $(1+z)^p$, et ainsi de suite. Ainsi leur produit répondra au développement de $(1+z)^{m+n+p+\ldots\ldots}$, et par conséquent sera une série semblable à la première qui sera composée en $m+n+p+\ldots\ldots$ de la même manière que la première l'est en m; donc le produit qui résultera de la multiplication de toutes ces séries sera encore ce que devient la première série, lorsqu'au lieu de m on y substitue $m+n+p+\ldots\ldots$, quelles que soient d'ailleurs les quantités représentées par m, n, p, etc. Car si les coefficiens des diverses puissances de z dans le produit de toutes ces séries différaient par quelques termes de ceux des coefficiens des mêmes puissances de z, lorsque m, n, p, etc. sont des nombres entiers, il faudrait que ces derniers termes s'entre-détruisissent pour toutes les valeurs qu'on pourrait donner aux quantités m, n, p, q, etc.; ainsi il faudrait qu'après avoir donné à n, p, q, etc. des valeurs particulières, il fût possible de rendre nul d'une infinité de manières un polynome dans lequel il n'y aurait que des puissances entières de m, et dont le degré ne pourrait surpasser

celui de l'exposant de z qui le multiplie, ce qui est absurde; par conséquent, si on suppose que les séries dont on a parlé soient en nombre k et qu'elles soient toutes égales à la première, on aura pour la puissance k de cette dernière série un résultat qui sera ce que devient cette même série lorsque pour m on substitue km. Si donc on suppose que m représente une fraction $\frac{m}{n}$, et qu'on fasse $k=n$; la série

$$1+\frac{m}{n}z+\frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1}{2}\cdot z^2+\text{etc.},$$

élevée à la puissance n donnera le développement de $(1+z)^m$.

36. Si le nombre m est irrationnel, on peut le concevoir compris entre deux nombres rationnels aussi resserrés qu'on le voudra, et comme les termes de la série seront toujours compris entre les termes correspondans de deux séries semblables formés avec ces nombres rationnels, il en résulte que la première série exprimera encore la valeur de $(1+z)^m$, lorsque m sera irrationnel, pourvu toutefois que le deuxième terme soit moindre que l'unité.

37. Il est bon d'observer que la série dont

nous parlons donne non-seulement la valeur de $(1+z)^m$, lorsque z est plus petit que 1, mais encore qu'elle exprime toujours le développement de cette puissance; car si le développement pouvait en différer par les coefficiens, on aurait en les représentant par A, B, C, etc.

$$(1+z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots;$$

mais on a

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m.m-1}{2}z^2 + \text{etc.}$$

Ainsi en comparant les seconds membres, on en déduirait des équations contradictoires avec notre hypothèse.

38. La formule du binome que nous n'avions d'abord démontrée que pour le cas de l'exposant entier se trouve donc démontrée pour tous les cas, et par conséquent peut être employée à l'extraction des racines des nombres; il suffit pour cela de décomposer le nombre, dont on veut extraire la racine, en deux parties inégales dont la plus grande soit une puissance exacte de l'indice de la racine, et qu'on la prenne pour le premier terme du binome; c'est ce qu'on voit par la formule

$$(x+a)^m = x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m =$$

$$x^m\left\{1+m\frac{a}{x}+\frac{m.m-1}{2}\cdot\frac{a^2}{x^2}+\text{etc.};\right\}$$

car si x était plus petit que a, la série qui est comprise dans la parenthèse serait divergente et ne pourrait être employée pour l'usage de l'extraction des racines : mais on peut, à l'aide d'une préparation fort simple, trouver une série qui converge toujours quelle que soit la grandeur de la première des deux parties dans lesquelles le nombre est décomposé; car on a, quel que soit m

$$(x+a)^m = x^m\left(\frac{x+a}{x}\right)^m = x^m\left(\frac{x}{x+a}\right)^{-m}$$

$$= x^m\left\{1-\frac{a}{x+a}\right\}^{-m};$$

développant le second membre, on aura

$$(x+a)^m = x^m\left\{1+m\frac{a}{x+a}+\frac{m.m+1}{2}\left(\frac{a}{x+a}\right)^2+\text{etc.},\right\}$$

série qui est toujours convergente et qui n'exige d'autre attention, pour l'extraction des racines, si ce n'est de prendre pour x^m un nombre rationnel.

39. Pour terminer ce que nous avons à dire ici sur le développement des puissances, nous

allons considérer celui d'une puissance quelconque d'un polynome composé de tant de termes qu'on voudra. Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de trouver le développement de $(a+b+c+d)^m$; pour y arriver, nous observerons qu'il suffit de remplacer dans le développement de $(a+b)^m$ la lettre b par $b+c$, d'effectuer les puissances indiquées sur ce binome dans chacun des termes, et de substituer dans le résultat $c+d$ au lieu de c, puis de développer les diverses puissances de $c+d$. Pour obtenir le terme général de ce développement, nous observerons que celui de $(a+b)^m$ pouvant être représenté par $Na^{m-n}b^n$, celui de $(b+c)^n$ pourra être représenté par $N'b^{n-r}c^r$ et celui de $(c+d)^r$ par $N''c^{r-s}d^s$; par conséquent le terme général du développement de..... $(a+b+c+d)^m$ pourra être représenté par $NN'N''a^{m-n}b^{n-r}c^{r-s}d^s$; or on sait qu'on a

$$N=\frac{m.....m-n+1}{1.....n}.$$

Si on introduit au numérateur et au dénominateur de la fraction qui compose le second membre de cette équation, les facteurs $m-n$, $m-n-1.....m$, c'est-à-dire, les facteurs qui manquent au numérateur de cette fraction

pour que le numérateur soit égal à $1.2\ldots m$, et qu'on supprime au numérateur et au dénominateur de la fraction qui en résultera, les facteurs $1.2\ldots\ldots n$ qui se trouvent au dénominateur de la première fraction, on aura

$$N = \frac{n+1\ldots\ldots m}{1\ldots\ldots m-n},$$

on aura de même

$$N' = \frac{p+1\ldots\ldots n}{1\ldots\ldots n-p},$$

$$N'' = \frac{q+1\ldots\ldots p}{1\ldots\ldots p-q};$$

par conséquent

$$NN'N'' = \frac{n+1\ldots m}{1.2\ldots m-n}\cdot\frac{p+1\ldots n}{1.2\ldots n-p}\cdot\frac{q+1\ldots p}{1.2\ldots p-q}.$$

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction qui compose le second membre de cette équation par $1.2\ldots q$, on verra que le terme général du développement de $(a+b+c+d)^m$ est

$$\frac{1.2\ldots\ldots m}{1.2\ldots m-n.\ 1.2\ldots n-p.\ 1.2\ldots p-q.\ 1.2\ldots q}\,a^{m-n}b^{n-p}c^{p-q}d^{q},$$

et que par suite ce développement se composera d'autant de termes de la forme

$$\frac{1\ldots\ldots m}{1\ldots\alpha.1\ldots\beta.1\ldots\gamma.1\ldots\delta}\,a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta},$$

(lorsque m est un nombre entier) qu'on pourra satisfaire de fois à l'équation..... $\alpha+\beta+\gamma+\delta=m$ en prenant pour α, β, γ, δ des nombres entiers et positifs.

Si le nombre m est fractionnaire ou négatif, le terme général résultera de la substitution de $b+c+d$, au lieu de b dans celui de $(a+b)^n$; or le terme général de $(a+b)^n$ est

$$\frac{m.....m-n+1}{1.....n}a^{n-s}b^s,$$

d'ailleurs celui de $(b+c+d)^s$ lorsque n est entier et positif, est

$$\frac{1.....n}{1...\beta.1...\gamma.1...\delta}b^\beta c^\gamma d^\delta,$$

ainsi celui de $(a+b+c+d)^n$ sera

$$\frac{m.....m-n+1}{1...\beta.1...\gamma.1...\delta}a^{m-n}b^\beta c^\gamma d^\delta;$$

β,γ,δ étant des nombres entiers et positifs, et pris de manière que leur somme soit égale à n.

4°. Si on veut avoir la somme des coefficiens numériques des termes du développement d'une puissance quelconque d'un polynome composé d'un nombre fini de termes, il n'y a qu'à supposer que chacun des termes du polynome devient égal à l'unité, et on trouvera que la

somme de tous les termes du développement de la puissance m d'un polynome composé de n termes, est égal à n^m.

41. Nous avons oublié plus haut de considérer le produit de plusieurs facteurs binomes dont tous les termes sont inégaux, tels que $(a+b)$, $(c+d)$, $(e+f)$, $(g+h)$; mais rien n'est plus simple que de reconnaître la composition des différens termes de leur produit : il suffit pour cela de diviser chaque binome par son premier terme et de les multiplier ainsi divisés, puis de multiplier le produit qui en résulte par celui des premiers termes des binomes. Si on opère ainsi qu'il vient d'être dit sur les binomes qu'on vient de considérer, leur produit sera le même que celui qui résulte de la multiplication des facteurs

$$aceg\ldots\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{d}{c}\right)\left(1+\frac{f}{e}\right)\left(1+\frac{h}{g}\right)\ldots$$

Or, en vertu de ce qu'on sait touchant le produit de plusieurs facteurs binomes qui ont un même premier terme, il est facile de voir que le produit précédent ou celui des facteurs $(a+b)$, $(c+d)$, $(e+f)$, $(g+h)$ est égal au produit des premiers termes, plus tous les produits de chacun des seconds termes par les produits des pre-

miers termes des autres facteurs, plus tous les produits des seconds termes des binomes pris deux à deux et multipliés respectivement par les produits des premiers termes des autres binomes, plus la somme des produits trois à trois des seconds termes par les produits des premiers termes des autres binomes, et ainsi de suite jusqu'au dernier terme qui est le produit de tous les seconds termes des binomes.

42. Dans ce qui précède nous avons fait voir que la série qui exprime le développement d'une puissance entière d'un binome jouit de toutes les propriétés qui caractérisent cette fonction, de sorte que sa marche dans ses accroissemens et ses diminutions, est précisément la même que celle de la fonction. Mais ce que cette série offre de plus remarquable, ce n'est point seulement de suivre dans ses variations successives les mêmes changemens qu'éprouve la fonction qu'elle représente, lorsque le degré de la puissance est un nombre entier, mais c'est de pouvoir représenter encore les variations que subit la même fonction lorsque l'exposant est un nombre fractionnaire, et par suite, lorsqu'il est quelconque : cette extension d'une même formule à tous les cas qui peuvent s'offrir a été pour l'analyse un

des plus beaux résultats obtenus dans l'un des siècles derniers, et surtout un des plus propres à montrer l'influence que les signes peuvent avoir sur la science des grandeurs, lorsqu'ils sont choisis de manière à pouvoir être traités dans leurs combinaisons, aussi bien que dans l'évaluation des fonctions qu'ils représentent, comme de simples quantités.

Théorie générale des équations.

43. Si dans un polynome qui résulte de la multiplication du produit d'un certain nombre de facteurs binomes, tels que $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$,.... on substitue au lieu de x une quantité quelconque, le résultat de la substitution sera le même que si elle avait lieu dans les facteurs binomes et qu'ensuite on les multipliât entr'eux. Or la substitution de l'une quelconque des quantités a, b, c, d,.... dans les facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$,... rendant nul un de ces facteurs, et la substitution de toute autre quantité ne pouvant rendre nul aucun d'eux, il en résulte que non-seulement les premières quantités étant substituées dans le polynome jouiront de la propriété de le rendre nul, mais encore qu'elles seront les seules

qui en jouissent; par conséquent, si un polynome résulte du produit de plusieurs facteurs binomes, il ne peut devenir nul par la substitution d'un plus grand nombre de quantités qu'il n'est marqué par son degré.

44. De ce qui précède il suit que si un polynome provient du produit de plusieurs facteurs du premier degré, il ne peut résulter du produit d'aucun autre système de facteurs de ce degré; car si un polynome pouvait provenir du produit des facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$,.... et d'un autre système de facteurs dont $x - \alpha$ différent de $x - a$, $x - b$, $x - c$,.... ferait partie, il s'ensuivrait que la quantité α qui rend nul le second système devrait rendre nul le premier, ce qui est impossible, puisque α par hypothèse est différent de a, b, c;... ainsi les facteurs du second système ne peuvent différer de ceux du premier; de plus, si l'un d'eux $x - a$, par exemple, se trouve élevé à une certaine puissance dans le premier système, il ne peut se trouver dans le second élevé à une autre puissance; car si le contraire avait lieu, en divisant les deux systèmes par la plus petite puissance de $x - a$ qui se trouve dans l'un, il en résulterait deux quotiens égaux;

quoique le facteur $x - a$ se trouve dans l'un et ne se trouve pas dans l'autre, ce qui ne peut avoir lieu, puisqu'on pourrait en conclure que la substitution de a à la place de x, dans un polynome, pourrait rendre nul ce polynome et ne pas le rendre nul, ce qui est impossible; donc il est pareillement impossible qu'il existe plusieurs systèmes de facteurs du premier degré qui, étant multipliés entr'eux, puissent donner le même produit.

45. C'est à cause de cette propriété qu'ont les quantités a, b, c, d,... de donner les coefficiens d'un polynome, et de les donner de manière à être les seules qui puissent les reproduire, lorsqu'elles sont prises en même nombre et soumises aux opérations indiquées par la manière dont elles entrent dans la composition des coefficiens, qu'on leur a donné le nom de *racines*.

46. De ce que nous avons dit sur le produit de plusieurs facteurs binomes, touchant la manière dont les seconds termes entrent dans la composition des coefficiens des diverses puissances du terme commun à tous ces binomes, et de ce que ces seconds termes sont les racines du produit prises avec des signes

contraires, on peut conclure, 1°. que le coefficient du second terme d'un polynome qui résulte du produit d'un nombre quelconque de facteurs simples, est égal à la somme des racines prises avec des signes contraires;

2°. Que le coefficient du troisième terme est la somme des produits deux à deux des racines prises avec des signes contraires, ou simplement la somme des produits deux à deux des racines, puisque le changement de signe des facteurs ne change point leur produit lorsqu'ils sont en nombre pair.

3°. Que le coefficient du quatrième terme est la somme des produits trois à trois des racines prises avec des signes contraires, et ainsi de suite jusqu'au dernier terme, qui est le produit des racines prises avec des signes contraires.

47. Il résulte encore de ce que nous venons de dire, que si le second terme manque, la somme des racines positives est égale à la somme des racines négatives, que si le troisième ne s'y trouve pas, la somme des produits deux à deux qui ont le signe plus, est égale à celle des pro-

duits deux à deux qui ont le signe moins, et ainsi de suite.

48. On voit par ce qui vient d'être dit, qu'il est toujours facile de former les divers coefficiens d'un polynome dont on connaît les racines. Mais il n'en est pas ainsi de la détermination des racines par les coefficiens, car les efforts réunis des plus grands géomètres n'ont pu jusqu'à présent surmonter les obstacles qui s'opposent à cette détermination, excepté pour les équations des quatre premiers degrés, et un petit nombre de classes particulières ; du moins en considérant cette détermination dans le sens le plus absolu, lequel consiste à trouver le système des opérations à effectuer sur les coefficiens d'un polynome, ou en d'autres termes, à trouver les fonctions de ces coefficiens qui, étant substituées à la place de x, jouissent de la propriété de le rendre nul. Comme c'est à cette détermination que se réduit la recherche des valeurs des inconnues dans les équations de degré quelconque à une seule inconnue, on lui a donné le nom *de résolution générale et algébrique des équations.*

Cette résolution générale ne s'étendant

résultat est

$$A(x^m - a^m) + B(x^{m-1} - a^{m-1}) + C(x^{m-2} - a^{m-2}) + \ldots$$
$$\ldots + T(x - a);$$

or chaque terme de ce résultat est divisible par $x - a$ puisque chacun d'eux est un multiple de la différence des puissances semblables de deux quantités, et que la différence de deux puissances semblables et entière de deux quantités est toujours divisible par la différence de ces quantités; par conséquent, si un polynome entier et rationnel devient nul par la substitution de a au lieu de x, il sera divisible par $x - a$.

Si on effectue la division par $x - a$ on aura un quotient du degré $m - 1$, de sorte qu'en admettant l'existence d'une quantité numérique ou algébrique réelle ou imaginaire qui jouisse de la propriété de rendre nul un polynome, on pourra toujours le considérer comme résultant du produit d'un facteur du premier degré par un facteur d'un degré moindre d'une unité. De là résulte le théorème suivant.

THÉORÈME II.

Tout polynome entier et rationnel d'un degré quelconque peut être considéré comme le produit d'autant de facteurs du premier degré, qu'il est marqué par le degré du polynome.

51. Car si a est une des racines du polynome on peut le considérer comme résultant du produit de $x-a$ pour un facteur du degré $m-1$. Mais si b étant substitué pour x dans celui-ci le rend nul, on pourra le regarder comme étant le produit de $x-b$ par un facteur du degré $m-2$, et par conséquent le polynome proposé comme étant le produit de deux facteurs du premier degré par un facteur du degré $m-2$; mais au facteur du degré $m-2$ on peut substituer un facteur du premier degré $x-c$ par un facteur du degré $m-3$, et comme à celui-ci on peut substituer un facteur du premier degré $x-d$ par un facteur du degré $m-4$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un facteur du premier degré, il en résulte, à cause que ce dernier facteur ne s'obtiendra qu'après $m-1$ opérations, qu'un polynome d'un degré quelconque peut être

regardé comme étant le produit d'autant de facteurs du premier degré qu'il est marqué par le degré du polynome.

52. Si on substitue au lieu de x dans le produit des facteurs $(a-a)(x-b)(x-c)\ldots$ l'une quelconque des quantités a, b, c....il deviendra nul, et si on y substitue d'autres quantités il ne pourra devenir nul ; par conséquent un polynome a autant de racines qu'il est marqué par son degré, et il ne peut en avoir un plus grand nombre.

De ce qu'un polynome peut être décomposé en autant de facteurs du premier degré qu'il est marqué par le degré du polynome, et de ce qu'on sait touchant la composition de ses coefficiens en fonction des racines, on peut, sans rien connaître sur la grandeur et la nature de ses racines, résoudre diverses questions relatives à la transformation des polynomes en d'autres dont les racines aient avec celles du polynome proposé des relations données. Comme ces sortes de questions sont d'un très-fréquent usage et qu'elles ont un but d'utilité, nous allons dans les problèmes suivans nous occuper de la résolution de plusieurs d'entr'elles.

Transformation de polynomes de degrés quelconques en d'autres polynomes dont les racines aient avec celles du polynome proposé des relations données.

PROBLÈME I.

Etant donné un polynome, en trouver un autre dont les racines soient égales et de signes contraires à celles du polynome proposé.

53. Soient $a, b, c, d, \ldots$ les racines du polynome donné, $-a, -b, -c, -d \ldots$ seront celles du polynome cherché; par conséquent le premier polynome étant le produit des facteurs $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots$, le second sera le produit des facteurs $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots$; or on voit qu'on passera du premier produit au second, si le nombre des facteurs est pair, en changeant x en $-x$, puisqu'après cette substitution, le changement de signe de tous les facteurs ne change rien au produit. Si donc lorsqu'un polynome est de degré pair, on change les signes des puissances impaires de x, les racines seront les mêmes au signe près. Si le nombre des facteurs est impair, au-

quel cas le polynome est de degré impair, la substitution de $-x$ à la place de x dans les facteurs du premier produit et le changement de signe de tous ces facteurs donnera un résultat qui ne différera que par le signe de celui des seconds facteurs, ensorte que pour obtenir celui-ci au moyen de celui-là, il faudra dans ce dernier changer tous les signes ; or l'effet de la substitution de $-x$ à la place de x dans le polynome proposé, étant de changer les signes des puissances impaires de x, il en résulte que tous les termes de rang impair auront changé de signe, et comme on doit changer celui du résultat, on voit que lorsque le polynome est de degré impair, comme lorsqu'il est de degré pair, il faut changer les signes des termes de rang pair, en supposant l'équation complète, ou, ce qui revient au même, changer les signes des termes dans lesquels les complémens des exposans de x au degré du polynome sont des nombres impairs.

C'est ce qui résulte immédiatement de la manière dont les seconds termes des facteurs entrent dans la composition des coefficiens d'un polynome ; car les racines du polynome cherché devant être égales et de signes contraires

à celles du polynome donné, la somme des racines du premier ne différera de celle du second que par le signe : ainsi le second terme du premier polynome s'obtiendra en changeant dans le second le signe du second terme ; les changemens de signes dans un nombre pair de facteurs ne changeant pas celui de leur produit, il s'ensuit que le coefficient du troisième terme ne changera pas ; les changemens de signes apportés dans un nombre impair de facteurs changeant le signe de leur produit, le coefficient du quatrième terme changera nécessairement de signe. En poursuivant le même raisonnement, on verra que le coefficient du cinquième terme ne changera pas de signe, que celui du sixième en changera, et ainsi alternativement. Si donc on veut avoir un polynome dont les racines soient égales et de signes contraires à celles d'un polynome donné, il suffira de changer dans celui-ci les signes des termes de rang pair, en supposant l'équation complète, ou, ce qui revient au même, à changer les signes des termes dans lesquels les complémens des exposans de x au degré du polynome, sont des nombres impairs.

PROBLÈME II.

Étant donné un polynome, en trouver un dont les racines soient égales à celles du premier, ajoutées à une quantité k.

54. Soient $a, b, c, d\ldots$ les racines du polynome donné, celles du polynome cherché seront $k+a$, $k+b$, $k+c$, $k+d$...; aux premières racines correspondent évidemment les facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$,... et aux secondes les facteurs $x-k-a$, $x-k-b$, $x-k-c$, $x-k-d\ldots$; ainsi le premier polynome est le produit des premiers facteurs, et le deuxième le produit des seconds : or il est évident que pour passer du premier produit au second, il suffit de changer x en $x-k$. Si donc on substitue dans le polynome donné $x-k$ pour x, on aura un polynome dont les racines seront celles du premier polynome auxquelles on aura ajouté la quantité k.

On pourrait, sans avoir recours au développement des puissances d'un binome, trouver successivement les coefficiens des diverses puissances de x; mais cela est si facile que nous ne nous y arrêterons pas.

PROBLÈME III.

Étant donné un polynome, en trouver un autre dont les racines soient celles du premier polynome multipliées par une quantité k.

55. Soient $a, b, c, d\ldots$ les racines du polynome donné, $ka, kb, kc, kd\ldots$ seront celles du polynome cherché : le premier polynome est évidemment le produit des facteurs $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots$. et le second celui des facteurs $(x-ka)(x-kb)(x-kc)(x-kd)$; or si on divise chacun de ces facteurs par k, et qu'on multiplie le tout par k^m (m étant leur nombre), le résultat sera le même, ensorte que le polynome dont il s'agit sera le produit de $k^m\left(\frac{x}{k}-a\right)\left(\frac{x}{k}-b\right)\left(\frac{x}{k}-c\right)\left(\frac{x}{k}-d\right)\ldots$. Or l'inspection seule de ces facteurs suffit pour faire voir que pour passer du premier produit au second, il suffit de changer x en $\frac{x}{k}$ et de multiplier le tout par k^m. Si donc le polynome donné est $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} +$ etc. le polynome cherché sera $x^m + Akx^{m-1} + Bk^2x^{m-2} + Ck^3x^{m-3} +$ etc.

C'est ce qu'il était facile de conclure de la manière même dont les racines entrent dans les coefficiens, car si chaque racine doit être multipliée par k, la somme des racines sera multipliée par k, par conséquent le coefficient du second terme sera multiplié par k; chaque racine étant multipliée par k, la somme des produits deux à deux de ces racines, et par conséquent le coefficient du troisième terme sera multiplié par k^2; les produits trois à trois étant multipliés par k^3, le coefficient du quatrième terme sera multiplié par k^3 et ainsi de suite.

De ce qui précède, il résulte que toute équation dont le coefficient du premier terme n'est pas l'unité, lorsque tous les autres sont des nombres entiers, peut être transformée en une autre dont le coefficient du premier terme soit l'unité et les autres des nombres entiers. En effet, si on divise toute l'équation par le coefficient du premier terme, et qu'ensuite on multiplie les racines par ce coefficient, tous les autres en seront des multiples, et l'équation transformée aura pour coefficient du premier terme l'unité et pour les autres des nombres entiers.

Il suit aussi de ce qui précède que tout polynome dont le coefficient du premier terme est

l'unité et dont tous les autres sont des nombres entiers, ne peut avoir de racines fractionnaires, car si une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ pouvait rendre nul ce polynome, la quantité a rendrait nul celui dont les racines seraient b fois plus grandes. Or pour que cela ait lieu, il faudrait que le premier terme a^m pût être égal et de signe contraire à la somme de tous les autres; et comme ceux-ci sont multipliés par des puissances de b, il faudrait que a^m fût divisible par b; ce qui est impossible puisque a et b sont premiers entre eux.

PROBLÈME IV.

Étant donné un polynome, en trouver un autre dont les racines soient les réciproques de celles du polynome proposé.

56. Soit $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Tx+V$ un polynome, si a, b, c, d... en sont les racines, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$... seront celles du polynome cherché, par conséquent ce polynome sera le produit des facteurs.

$$\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{b}\right)\left(x-\frac{1}{c}\right)\left(x-\frac{1}{d}\right)\ldots\ldots$$

Si on multiplie le premier de ces facteurs par

$-a$, le second par $-b$, le troisième par $-c$, et ainsi de suite, et qu'ensuite on divise le tout par le produit des seconds termes, c'est-à-dire, par V, le produit ne changera pas et on pourra le mettre sous la forme suivante.

$$\frac{1}{V}(-ax+1)\ (-bx+1)(-cx+1)(-dx+1)\ldots$$

Si on divise chacun de ces facteurs par x, et qu'on multiplie le tout par x^m, le produit sera encore le même, et on aura

$$\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{b}\right)\left(x-\frac{1}{c}\right)\left(x-\frac{1}{d}\right)\ldots\ldots$$
$$=\frac{x^m}{V}\left(\frac{1}{x}-a\right)\left(\frac{1}{x}-b\right)\left(\frac{1}{x}-c\right)\ldots\ldots$$

Or le produit de

$$\left(\frac{1}{x}-a\right)\left(\frac{1}{x}-b\right)\left(\frac{1}{x}-c\right)\ldots\ldots$$

s'obtiendra évidemment en changeant x en $\frac{1}{x}$ dans le produit des facteurs $(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ldots\ldots$, c'est-à-dire dans le polynome proposé. Par conséquent, si dans un polynome du degré m on change x en $\frac{1}{x}$ qu'on multiplie le tout par x^m, et qu'ensuite on divise le résultat par le coefficient du dernier terme, on aura un

polynome dont les racines seront les réciproques de celles du polynome proposé. C'est d'ailleurs ce qui est évident; car le dernier terme devant être le produit des racines réciproques, est égal à $\frac{1}{abc...}$ ou à $\frac{1}{V}$. Le coefficient de l'avant-dernier terme devant être le produit de ces mêmes racines prises $m-1$ à $m-1$, est égal à $\frac{a}{abcd}+\frac{b}{abcd}+$ etc., c'est-à-dire égal au second terme du polynome proposé, divisé par V, et ainsi de suite.

57. En général, pour transformer une équation en une autre dont les racines aient avec celles de la proposée une relation donnée, il faut exprimer cette relation algébriquement, à l'aide d'une équation entre la nouvelle inconnue et celle de l'équation proposée, puis éliminer entre ces deux équations la première inconnue, et l'équation qui résultera de cette élimination sera alors l'équation cherchée.

58. Le produit de deux binomes qui ont un même premier terme offre une remarque qui dans quelques circonstances peut faciliter la recherche du produit de deux quantités numériques. Prenons les deux binomes $(x-a)$,

$(x - b)$, leur produit mis sous la forme $x(x-a-b) + ab$ fait voir que, pour obtenir le produit des nombres représentés par $x - a$ et par $x - b$, il faut au produit des complémens de ces nombres à x, y ajouter autant d'unités de l'espèce déterminée par x qu'il y a d'unités dans le nombre compris entre les deux parenthèses, lequel est égal à l'un des facteurs donnés, diminué de l'excès de x sur l'autre facteur. Ainsi, si on veut avoir le produit de 987 par 998 on rapportera ces nombres à 1000, c'est-à-dire, qu'on fera $x=1000$, $a=13$, $b=2$, ensuite on ôtera du premier facteur 987 le nombre 2 qui est le complément du second nombre à 1000, ce qui donnera le nombre 985 que l'on comptera pour des mille; à ce nombre, on ajoutera le produit 26 des complémens des deux facteurs à 1000 et on aura 985026 pour le produit demandé.

59. Ce que nous venons de dire démontre la règle qu'on donne pour trouver avec les doigts le produit de deux nombres exprimés par un seul chiffre : cette règle consiste à fermer les doigts des deux mains, puis à en lever autant d'une des mains qu'il faudrait ajouter d'unités au premier nombre pour avoir dix, et en

lever autant de la seconde main qu'il y a d'unités dans le complément du second nombre à dix, et à ajouter au produit des doigts levés des deux mains autant de dixaines qu'il y a de doigts qui ne l'ont pas été dans les deux.

60. Il serait facile de multiplier les applications qu'on peut faire de la théorie des produits successifs et d'en déduire un grand nombre de conséquences semblables aux précédentes; mais comme la plupart se présentent d'elle-mêmes, nous croyons ne pas devoir nous y arrêter, dans ce qui va suivre nous allons montrer l'usage qu'on peut faire de la loi suivant laquelle les seconds termes des binomes entrent dans la composition des coefficiens des puissances successives du premier terme, pour trouver les équations à l'aide desquelles on peut obtenir les sommes des puissances entières positives ou négatives d'une équation en fonction des coefficiens de cette équation.

PROBLÈME V.

Trouver la somme des puissances semblables entières, positives ou négatives des racines d'une équation en fonction des coefficiens de cette équation.

61. Soit $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+Tx+V$ un polynome, et $a, b, c, d\ldots$ ses racines. Si on le divise par $x-a$, on aura un quotient qui sera égal à

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
x^{m-1}+a & x^{m-2}+a^2 & x^{m-3}+a^3 & x^{m-4}+\ldots & +a^{m-1} \\
A & Aa & Aa^2 & & +Aa^{m-2} \\
 & B & Ba & & +Ba^{m-3} \\
 & & C & & +Ca^{m-4} \\
 & & & & \ldots\ldots \\
 & & & & +T
\end{array}$$

Si on divise le même polynome successivement par les facteurs $x-b$, $x-c$, $x-d$, etc. dans lesquels il se décompose, on aura des résultats qui ne différeront du précédent que par la lettre a, qui sera changée en b, c, d, etc. Si on les ajoute tous ensemble et qu'on désigne par S_1, S_2, $S_3\ldots\ldots$, les sommes des premières, secondes, troisièmes,.... puissances des

des racines, on aura

$$\begin{array}{l|l|l|l} mx^{m-1} + S_1 & x^{m-2} + S_2 & x^{m-3} + S_3 & x^{m-4} \ldots + S_{m-1} \\ \quad + mA & \quad + AS_1 & \quad + AS_2 & \quad + AS_{m-3} \\ & \quad + mB & \quad + BS_1 & \quad + BS_{m-3} \\ & & \quad + mC & \quad + CS_{m-4} \\ & & & \ldots\ldots \\ & & & \quad + mT \end{array}$$

D'un autre côté, si on substitue dans les quotiens successifs pour les coefficiens A, B, C, D, etc., leurs valeurs en fonction des racines, et qu'on les ajoute, on trouvera, après les réductions faites, que le coefficient de chaque terme est égal au coefficient du terme de même rang dans le polynome multiplié par l'exposant de x dans ce même terme. En effet, le coefficient de second terme dans la somme de ces quotiens est $a+b+c+\ldots+mA$. Ainsi puisque la somme $a+b+c\ldots$. des racines est égale et de signe contraire à A, il en résulte que ce coefficient se reduit à $(m-1)$ A. Le coefficient de x^{m-3} dans le premier quotient étant a^2+Aa+B se réduit évidemment à la somme des produits deux à deux des lettres $b, c, d\ldots$; car la quantité A étant la somme des racines $a, b, c, d\ldots$ prises avec le signe moins, le terme a^2 est détruit par $-a^2$. Il ne reste donc des deux pre-

miers termes de ce coefficient, que le produit de la lettre a par $-b-c-d\ldots$ Or, ces produits se trouvent avec des signes contraires dans B ; ainsi la somme des trois termes de ce coefficient se composera des produits deux à deux des lettres $a, b, c, d\ldots$, moins ceux dans lesquels entre la lettre a. Il est facile de voir, d'après cela, que le coefficient de la même puissance de x dans le second quotient, se réduit à la somme des produits deux à deux des racines, moins ceux dans lesquels se trouve la lettre b, et ainsi des autres. Le coefficient de x^{m-3} sera donc égal à mB, moins la somme des produits de la lettre a, par toutes les autres, moins la somme des produits de la lettre b par toutes les autres, et ainsi de suite. Or, cette somme est évidemment égale à 2B, [7] ainsi qu'on l'a fait voir plus haut; par conséquent le coefficient de x^{m-3} est $(m-2)$ B.

Si dans l'expression a^3+Aa^2+Ba+C, qui est celle du coefficient de x^{m-4} dans le premier quotient, on fait les substitutions énoncées, il est facile de voir qu'elle se réduira à la somme des produits trois à trois des racines prises avec des signes contraires, moins celle de ces produits, dans lesquels se trouve la lettre a.

En effet, A étant la somme des racines prises avec des signes contraires, le premier terme a^3 sera détruit par $-a^3$: il ne restera donc des deux premiers termes que la somme des produits deux à deux des lettres b, c, $d\ldots$, par a^2; or, ces produits se trouvent avec des signes contraires dans Ba, il ne restera donc de la somme des trois premiers termes, que la somme des produits deux à deux des lettres b, c, $d\ldots..$ par la lettre a; et comme cette somme se trouve avec des signes contraires dans C, il ne restera de la somme des quatre termes dont le coefficient de x^{m-4} est composé, que la somme des produits trois à trois des seconds termes qui correspondent aux racines $a, b, c, d\ldots$, moins celle des produits trois à trois dans lesquels se trouve la lettre a. Comme le coefficient de x^{m-4} dans le second quotient est composé en b de la même manière que le précédent l'était en a, il se réduira à la somme des produits trois à trois des lettres a, b, c, $d\ldots..$, moins celle des produits dans lesquels se trouve la lettre b, et ainsi des autres; par conséquent le coefficient de x^{m-4} est égal à mC, moins les produits de la lettre a, par tous les produits deux à deux des autres lettres, moins les produits de la lettre b, par tous les produits deux à deux des

autres lettres, et ainsi de suite; or la somme de tous ces produits est égale à 3C [8]; par conséquent ce coefficient se réduira à $(m-3)C$. En raisonnant de la même manière, on fera voir que les coefficiens des termes suivans seront $(m-4)D$, $(m-5)E$, etc.; ainsi la somme des quotiens pourra être exprimée par

$$mx^{m-1}+m-1.Ax^{m-2}+m-2.Bx^{m-3}+m-3.Cx^{m-4}+..+T$$

Comparant les coefficiens des mêmes puissances de x dans les deux résultats, on aura

$$\begin{aligned} S_1+mA &= (m-1)A, \\ S_2+AS_1+mB &= (m-2)B, \\ S_3+AS_2+BS_1+mC &= (m-3)C; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} S_1+A &= 0, \\ S_2+AS_1+2B &= 0, \\ S_3+AS_2+BS_1+3C &= 0; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

62. De ce que nous avons dit précédemment, il résulte que la somme des quotiens d'un polynome par chacun de ses diviseurs, est égale à la somme des produits des termes de ce po-

lynome par les exposans de x, dans chacun de ses termes divisés par x. Si donc on représente le développement de $(x+a)^m$ par

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + \text{etc.}$$

on aura

$$m(x+a)^{m-1} =$$

$$mx^{m-1} + m-1.Ax^{m-2} + m-2.Bx^{m-3} + m-3.Cx^{m-4} + \text{etc.}$$

Si on multiplie cette dernière équation par $x+a$, on aura

$$m(x+a)^m =$$

$$mx^m + (m-1)A\left|\begin{matrix} x^{m-1} \\ ma \end{matrix}\right. + (m-2)B\left|\begin{matrix} x^{m-2} \\ (m-1)Aa \end{matrix}\right. + (m-3)C\left|\begin{matrix} x^{m-3} \\ (m-2)Ba \end{matrix}\right. + \text{etc.}$$

D'un autre côté on a

$$m(x+a)^m = mx^m + mAx^{m-1} + mBx^{m-2} + mCx^{m-3} + \text{etc.}$$

Si donc on compare les coefficiens des mêmes puissances de x, dans ces deux développemens, on en déduira les équations suivantes :

$$\begin{aligned} mA &= (m-1)A + ma, \\ mB &= (m-2)B + (m-1)Aa, \\ mC &= (m-3)C + (m-2)Ba, \\ mD &= (m-4)D + (m-3)Ca, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

De ces équations on tire,

$$A = ma$$

$$B = \frac{m.m-1}{2}a^2$$

$$C = \frac{m.m-1.m-2}{2.3}a^3$$

$$D = \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}a^4$$

.....

Substituant pour A, B, C, D, etc., leurs valeurs, on aura

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}a^2x^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}a^3x^{m-3} + \text{etc.}$$

qui est la formule connue.

63. Quoique l'analyse dont nous avons fait usage pour obtenir la formule qui donne les sommes des puissances des racines d'un polynome en fonction de ses coefficiens soit très-simple, on peut néanmoins en desirer une qui le soit encore plus et dont l'exposition soit plus rapide; c'est à quoi on parviendra si on considère que la somme des quotiens qu'on obtient

en divisant le polynome

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Tx + V,$$

par chacun des facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$.... dont il est composé, est égale à la somme des produits de ces mêmes facteurs pris $m - 1$ à $m - 1$, car cette même somme sera le coefficient de la première puissance de i dans le produit des facteurs

$$i + x - a;\ \ + x - b;\ i + x - c;\ldots.$$

or il est facile de voir que ce produit s'obtiendra en substituant $i + x$ ou $x + i$ au lieu de x dans le polynome

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Tx + V.$$

Si donc on développe les diverses puissances de $x + i$, le coefficient de la première puissance de i donnera la somme des produits $m - 1$ à $m - 1$ des facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$... Or, si dans une suite de puissances de x on substitue $x + i$ pour x, il faut pour avoir le coefficient de la première puissance de i, multiplier chacune d'elles par son exposant, et diminuer cet exposant d'une unité. Ainsi la

substitution étant faite dans le polynome ci-dessus, le coefficient de i sera égal à

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \ldots\ldots$$

et comme le résultat exprime la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des facteurs du premier polynome, et que cette somme en vertu de ce qu'on a expliqué plus haut [61], est aussi exprimée par

$$\begin{array}{lllll} mx^{m-1} + S_1 & x^{m-2} + S_2 & x^{m-3} + S_3 & x^{m-4} \ldots + S_{m-3} \\ \quad + mA & \quad + AS_1 & \quad + AS_2 & \quad AS_{m-4} \\ & \quad + mB & \quad + BS_1 & \quad BS_{m-3} \\ & & \quad + mC & \quad CS_{m-4} \\ & & & \quad \ldots\ldots \\ & & & \quad + mT \end{array}$$

Il en résulte qu'on aura :

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \ldots\ldots =$$

$$\begin{array}{lllll} mx^{m-1} + S_1 & x^{m-2} + S_2 & x^{m-3} + S_3 & x^{m-4} + \text{etc.} \\ \quad + mA & \quad + AS_1 & \quad + AS_2 & \\ & \quad + mB & \quad + BS_1 & \\ & & \quad + mC & \end{array}$$

Cette égalité devant se vérifier indépendamment d'aucune valeur particulière de x, il faut

que les coefficiens des mêmes puissances de cette variable soient égaux. Ainsi on aura les équations

$$\begin{aligned} S_1 + mA &= (m-1)A \\ S_2 + AS_1 + mB &= (m-2)B \\ S_3 + AS_2 + BS_1 + mC &= (m-3)C \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

desquelles on tire comme plus haut les équations

$$\begin{aligned} S_1 + A &= 0 \\ S_2 + AS_1 + 2B &= 0 \\ S_3 + AS_2 + BS_1 + 3C &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

lesquelles donneront les sommes des puissances en fonction des coefficiens, et réciproquement les coefficiens en fonction des sommes des puissances.

64. Si on suppose que les facteurs du premier degré $(x+a)$, $(x+b)$, $(x+c)$....., dans lesquels se décompose un polynome soient tous égaux entre eux et à $x+a$. La somme des produits $m-1$ à $m-1$ de ces facteurs devient égale à m fois $(x+a)^{m-1}$; d'un autre côté, si

on représente le développement de $(x+a)^m$ par $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots Tx+V$, la somme de ces mêmes produits sera égale à

$$mx^{m-1}+m-1.Ax^{m-2}+m-2.Bx^{m-3}+\text{ etc.}$$

de sorte qu'on aura l'identité

$$m\,(x+a)^{m-1}=$$

$$mx^{m-1}+m-1.Ax^{m-2}+m-2.Bx^{m-3}+\ldots\ldots,$$

de laquelle on déduira comme plus haut [62] la formule du binome.

65. Les formules précédentes donnent les sommes des puissances semblables entières et positives des racines d'une équation, lorsque le degré auquel elles sont élevées est inférieur à celui de l'équation; pour obtenir les sommes des autres puissances des racines de cette équation, il suffit de la multiplier par une puissance de x assez élevée pour que l'équation qui en résulte soit d'un degré supérieur à celui des puissances des racines dans les sommes des puissances qu'on veut déterminer, et de rechercher les sommes des puissances des racines dans cette équation. Ces racines ne différant de celles de la proposée que par celles qui sont nulles, la somme des puissances

des racines de la nouvelle équation sera la même que celle des racines de l'équation proposée.

66. Si on veut avoir les puissances semblables entières et négatives des racines d'une équation, il suffit de transformer l'équation en une autre dont les racines soient les réciproques de la proposée, et de considérer les sommes des puissances entières et positives de la transformée, puisqu'elles sont égales aux puissances semblables entières et négatives de la proposée.

PROBLÈME VI.

Etant donné un polynome, on propose d'en trouver un qui soit égal à la somme des produits qu'on peut former avec les m *facteurs dans lesquels il se décompose, pris* m — 1 *à* m — 1 *ou* m — 2 *à* m — 2 *ou en général* m — n *à* m — n.

67. Soient $x-a, x-b, x-c, \ldots$ les facteurs simples dans lesquels le polynome donné se décompose, si on substitue dans chacun d'eux $i+x$ au lieu de x, le coefficient de la première

puissance de i dans le produit de

$$\{i+x-a\}\ \{i+x-b\}\ \{i+x-c\}....$$

sera la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... le coefficient de i^2 dans le même produit sera la somme des produits des facteurs dans lesquels se décompose le polynome pris $m-2$ à $m-2$, et en général celui de i^n sera la somme des produits de ces mêmes facteurs pris $m-n$ à $m-n$. Or les coefficiens des différentes puissances de i dans le produit des facteurs

$$i+x-a,\ \ i+x-b,\ \ i+x-c,\ \ldots$$

sont égaux aux coefficiens des mêmes puissances de i dans le résultat de la substitution de $x+i$ à la place de x dans le polynome proposé; et comme le coefficient de la première puissance de i dans une puissance quelconque de $x+i$ s'obtient en multipliant le premier terme du développement par l'exposant de x dans ce terme, et diminuant l'exposant d'une unité, il en résulte que la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des facteurs dans lesquels le polynome donné se décompose, s'ob-

tiendra en multipliant chacun des termes de ce polynome par l'exposant de x dans chacun d'eux et diminuant l'exposant d'une unité, ou, ce qui revient au même, en prenant le polynome dérivé du polynome proposé.

Le coefficient de i^2 dans une puissance quelconque de $x+i$ s'obtenant en multipliant la moitié du coefficient du second terme du développement de la puissance par l'exposant de x dans ce terme, et diminuant cet exposant d'une unité, il en résulte que la somme des produits $m-2$ à $m-2$ des facteurs simples dans lesquels un polynome se décompose, est égal à la moitié du polynome dérivé du polynome proposé, ou, ce qui revient au même, à la moitié du polynome dérivé du second ordre de ce même polynome.

En général, le coefficient de i^n dans le développement d'une puissance quelconque de $x+i$ étant la fonction dérivée de l'ordre n du premier terme de ce développement divisé par le produit $1.2.3....n$ de la suite naturelle des nombres jusqu'à celui qui indique l'ordre de dérivation, il en résulte que la somme des produits des facteurs $x-a, x-b,$

$x - c, \ldots$ pris $m - n$ à $m - n$, sera égale au polynome dérivé de l'ordre n du polynome proposé divisé par $1.2 \ldots n$.

Application du problème précédent à la recherche des racines égales d'un polynome.

68. De ce que le polynome dérivé d'un polynome du degré m est la somme des produits des facteurs dans lesquels il se décompose, pris $m - 1$ à $m - 1$, et de ce que ces produits s'obtiennent en divisant celui des m facteurs successivement par chacun d'eux, il en résulte que si un facteur ne se trouve qu'une seule fois dans un polynome, il y aura un produit de $m - 1$ facteurs dans lequel il ne se trouvera pas, et comme il se trouvera dans chacun des autres, il ne pourra se trouver dans la somme des produits $m - 1$ à $m - 1$ des facteurs et par suite dans le polynome dérivé, par conséquent, si tous les facteurs simples d'un polynome sont inégaux, il ne pourra y avoir de commun diviseur entre ce polynome et son polynome dérivé. Si au contraire un facteur se trouve plusieurs fois dans un polynome, il se trouvera nécessairement une

fois de moins dans le polynome dérivé, car parmi les produits $m-1$ à $m-1$ il y en a dans lesquels ce facteur se trouve autant de fois que dans le polynome, et d'autres dans lesquels il se trouve une fois de moins, et comme ces derniers sont égaux entre eux, il en résulte que ce facteur se trouve dans le polynome dérivé un fois de moins que dans le polynome proposé, sans pouvoir l'y trouver un plus grand nombre de fois.

69. D'après ce qui vient d'être dit, on voit comment la recherche des racines d'un polynome qui a des facteurs multiples, peut être ramenée à celles des racines d'un polynome d'un degré moindre, car si on cherche le plus grand commun diviseur entre un polynome et son dérivé, ce commun diviseur sera le produit des facteurs égaux élevés à une puissance moindre d'une unité. Si on divise le polynome dont on cherche les racines par ce plus grand commun diviseur, le quotient sera égal au produit des facteurs égaux et inégaux élevés à la première puissance; si on cherche le commun diviseur entre ce quotient et le commun diviseur qui existe entre le polynome proposé et son dérivé, ce commun diviseur sera le produit des facteurs

égaux élevés à la première puissance ; si on divise le premier quotient par ce produit, on aura un polynome qui sera le produit de tous les facteurs inégaux; par conséquent, lorsqu'un polynome a des racines égales, ce qu'on reconnaît à ce que le polynome proposé et le polynome dérivé ont un commun diviseur, on pourra toujours ramener la recherche de ses racines à celle des racines de deux polynomes dont l'un sera le produit des facteurs égaux élevés à la première puissance, et dont l'autre sera le produit des facteurs inégaux élevés à la même puissance; on peut même très-souvent et sans qu'il soit nécessaire d'établir aucunes relations entre les racines, ramener la recherche des racines égales d'un polynome à celles de plusieurs polynomes de degrés inférieurs à celui qui les contient seulement une seule fois ; cela aura lieu toutes les fois que les différens systèmes de racines égales ne se trouveront pas dans le polynome le même nombre de fois. Pour le montrer clairement et afin de rendre le discours plus facile, nous représenterons par P le produit des facteurs qui se trouvent élevés à la moindre puissance dans le polynome proposé, par Q celui des facteurs égaux qui s'y trouvent élevés à la moindre puissance, lorsqu'on y supprime

ceux

ceux qui correspondent aux racines qui se trouvent dans P, par R le produit des facteurs qui se trouvent le plus petit nombre de fois dans le polynome proposé, lorsqu'on y supprime tous ceux qui correspondent aux racines qui se trouvent dans P et Q, et ainsi de suite : de plus, désignons respectivement par n, $n+n'$, $n+n'+n''$, $n+n'+n''+n'''$, les degrés de multiplicité des facteurs qui se trouvent dans P, Q, R, S, il est évident que le commun diviseur entre le polynome proposé et le polynome dérivé sera représenté par

$$P^{n-1}\,Q^{n+n'-1}\,R^{n+n'+n''-1}\,S^{n+n'+n''+n'''-1},$$

et que le commun diviseur, qui est le produit des facteurs égaux élevés à la première puissance, le sera par PQRS. Cela posé, si on divise le commun diviseur entre le polynome proposé et le polynome dérivé autant de fois qu'il est possible par PQRS, on aura, en comptant ce nombre de fois, la valeur de $n-1$; mais lorsque par des divisions successives par PQRS on arrive à un quotient qui n'est plus divisible par PQRS, c'est qu'alors tous les facteurs qui se trouvent dans P ne se trouvent pas dans ce quotient, puisque s'ils s'y

trouvaient, la division par PQRS pourrait encore avoir lieu; si on cherche le commun diviseur entre ce quotient, qui est égal à

$$Q^{n'}R^{n'+n''}S^{n'+n''+n'''} \text{ et } PQRS,$$

on aura un polynome qui sera égal au produit des facteurs qui se trouvent dans Q, dans R, et dans S; si on divise PQRS par ce commun diviseur, on aura P; si on divise $Q^{n'}R^{n'+n''}S^{n'+n''+n'''}$ par QRS autant de fois qu'il est possible, le quotient sera égal à $R^{n''}S^{n''+n'''}$, et le nombre de fois que les divisions successives auront pu s'opérer, donnera la valeur de n'; si on cherche le commun diviseur entre le quotient $R^{n''}S^{n''+n'''}$ et le polynome QRS, ce commun diviseur sera égal à RS; divisant le polynome QRS par RS on aura Q; si on divise $R^{n''}S^{n''+n'''}$ par RS autant de fois qu'on le pourra, on aura la valeur de n''; cherchant le commun diviseur entre $S^{n'''}$, et le diviseur RS employé précédemment, on aura R; divisant RS par R, on aura S; divisant $S^{n'''}$ autant de fois qu'on le pourra par S, on aura n'''; ayant les polynomes P, Q, R, S, on déterminera leurs racines et on aura les racines égales du polynome proposé; quant aux degrés de multiplicité de ces racines, on

pourra le déterminer, puisqu'on a trouvé les valeurs de n, n', n'', n'''.

70. On voit par ce qui précède, que toutes les fois qu'un polynome a des racines égales, on a des moyens de reconnaître leur existence et de ramener la recherche de ses racines à celle de polynomes de degrés inférieurs dont toutes les racines sont inégales; il arrive encore quelquefois qu'on peut abaisser ces derniers, c'est-à-dire, faire dépendre la recherche de leurs racines de celles de polynomes de degrés moins élevés: cela aurait lieu, par exemple, s'il se trouvait parmi les racines d'un de ces polynomes, des racines qui fussent égales et de signes contraires, car si on transforme le polynome en un autre dont les racines soient égales et de signe contraire, ce qui se fait par le simple changement de x en $-x$, les facteurs du premier polynome qui ne diffèrent que par le signe du second terme, se trouveront dans le polynome transformé et seront les seuls qui s'y trouveront; par conséquent, si on cherche le commun diviseur entre le polynome proposé et celui dont les racines ne diffèrent de celles du premier que par les signes, on trouvera un polynome qui sera le produit des facteurs qui

ne diffèrent que par le signe du second terme dans le polynome proposé. Si on divise ensuite le polynome proposé par ce commun diviseur, on aura un quotient dont les racines seront, abstraction faite du signe, toutes inégales entre elles ; ainsi un polynome qui a des racines qui ne diffèrent que par le signe, peut se décomposer en deux autres, dont l'un ne renferme que les racines inégales, abstraction faite du signe, et dont l'autre est le produit des facteurs qui ne diffèrent que par le signe du second terme ; on peut même ramener la résolution de ce dernier polynome à celui d'un polynome d'un degré moindre de moitié ; car ses racines étant égales et de signes contraires, le polynome ne change point lorsque pour x on y substitue $-x$, ce qui exige qu'il ne s'y trouve que des puissances paires de x ; ainsi si pour x^2 on y substitue z, on aura, comme on l'a dit, un polynome dont le degré sera moitié moindre.

71. Après avoir examiné si un polynome a des racines égales ou des racines qui soient égales et de signes contraires, et avoir exposé la marche à suivre pour n'avoir plus à opérer que sur des polynomes de degrés moindres dont toutes les racines soient inégales, abstraction faite du

signe, on peut voir si dans ces polynomes il n'y aurait pas des racines qui fussent réciproques l'une de l'autre, auquel cas on pourrait réduire encore la recherche des racines à celle de polynomes de degrés inférieurs, car si on transforme le polynome en un autre dont les racines soient les réciproques du polynome proposé, les racines de celui-ci se trouveront nécessairement dans l'autre, et comme ces racines seront les seules qui soient communes aux deux polynomes, il en résulte que les facteurs simples du premier polynome qui ont les seconds termes réciproques, feront partie des facteurs du second polynome; par conséquent, si on cherche le plus grand commun diviseur entre le polynome proposé et celui dont les racines sont les réciproques de celles du premier polynome, ce commun diviseur sera le produit des facteurs qui correspondent à ces racines; si donc on divise le polynome proposé par ce commun diviseur, on aura un polynome dont les racines seront celles du polynome proposé, qui ne sont point réciproques. Quant au polynome dont les racines sont réciproques, il est possible de l'abaisser encore d'un degré moindre de moitié, car si $\alpha, \frac{1}{\alpha}$; $\beta, \frac{1}{\beta}$; $\gamma, \frac{1}{\gamma}$, etc. sont des racines d'un polynome,

on peut en former un dont les racines soient $\alpha + \frac{1}{\alpha}$; $\beta + \frac{1}{\beta}$; $\gamma + \frac{1}{\gamma}$, etc., et, comme les produits un à un, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc. de ces couples de racines, pourront s'évaluer en fonction des coefficiens du polynome dont les racines sont α, β, $\gamma \ldots$ $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\alpha}$, et que d'ailleurs ces couples de racines sont en nombre moitié moindre que le degré du polynome, il en résulte que le polynome qui les aura pour racines, sera d'un degré moitié moins élevé que le polynome proposé; ayant les racines du premier, il sera facile de trouver celles du second, car si on trouve pour $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ une certaine quantité p, on en déduira $\alpha^2 - p\alpha + 1 = 0$, et par suite, α et α'.

72. Si plusieurs racines étaient en progression par différence ou par quotient, on pourrait facilement les séparer des autres et faire dépendre la résolution des polynomes d'autres polynomes plus simples; comme ces recherches n'ont aucunes difficultés et que la marche est toujours sensiblement la même, nous ne nous en occuperons point.

73. La théorie des racines égales peut se présenter encore d'une manière fort simple, en observant que si une équation a un certain nombre de racines égales à a, par exemple, et que l'on diminue toutes les racines de l'équation de cette quantité, l'équation transformée aura autant de racines qui seront nulles, que la proposée en avait d'égales à a. Si donc on substitue $a+y$ au lieu de x, ce qui est la substitution qu'il convient de faire pour diminuer toutes les racines de la quantité a, l'équation en y qui en résultera sera divisible par une puissance de y marquée par le nombre des racines égales à a, de sorte que les coefficiens des puissances de y inférieures au nombre qui marque celui de ces racines seront nuls; mais le coefficient des puissances de y immédiatement supérieur au nombre de ces racines, ne peut être nul, puisque si cela avait lieu, l'équation transformée aurait plus de racines égales à zéro que la proposée n'avait de racines égales à a, ce qui ne peut être. Cela posé, si on considère la manière dont on obtient les coefficiens des diverses puissances de y, on verra, 1°. que le terme indépendant de y est égal à la somme des produits des coefficiens de l'équa-

tion par les premiers termes des développemens des puissances de $a+y$ qui les multiplient, ou, ce qui revient au même, au résultat de la substitution de a au lieu de x dans le polynome proposé; 2°. que le coefficient de la première puissance de y est égal à la somme des produits des coefficiens de l'équation par les seconds termes des développemens des puissances de $a+y$ qui les multiplient, ou, ce qui revient au même, au résultat de la substitution de a au lieu de x dans le polynome dérivé du polynome proposé, et en général, que le coefficient d'une puissance quelconque de y est égal au résultat de la substitution de a au lieu de x dans le polynome dérivé de l'ordre marqué par l'exposant de cette puissance et divisé par le produit de la suite naturelle des nombres jusqu'à celui qui marque l'ordre de dérivation; ainsi, puisque les coefficiens des puissances de y inférieures au nombre des racines égales à a, sont nuls, il s'ensuit que si un polynome a un certain nombre de racines égales à a, il y aura autant de polynomes dérivés successifs qui deviendront nuls, qu'il y a d'unités dans le nombre immédiatement inférieur à celui des racines égales à a, sans que jamais le polynome dérivé

de l'ordre marqué par le nombre de ces racines puisse le devenir par la même substitution. Par conséquent, lorsqu'un polynome contiendra un certain nombre de racines égales à a, le polynome dérivé contiendra cette même racine une fois de moins que le polynome proposé; car si elle se trouvait dans le polynome dérivé seulement autant de fois que dans le polynome proposé, le polynome dérivé du premier ordre aurait autant de polynomes dérivés successifs qui deviendraient nuls, lorsque pour x on y substituerait la quantité a, qu'il est marqué par le nombre immédiatement inférieur à celui des racines égales à a qui se trouvent dans le polynome proposé, ce qui ne peut avoir lieu, puisque si cela était le polynome dérivé de l'ordre marqué par le nombre des racines égales à a, deviendrait nul par la substitution de cette quantité au lieu de x, ce qui est impossible. Comme les mêmes conclusions auraient encore lieu si le polynome dérivé du premier ordre admettait plus de racines égales à a que le polynome proposé, il faut en conclure que le nombre des racines égales à a sont en plus petit nombre dans le polynome dérivé que dans le polynome proposé; de plus, si le nombre de ces racines dans le polynome dérivé était

moindre de deux unités, par exemple, que dans le polynome proposé, il s'ensuivrait que le polynome dérivé de l'ordre marqué par le nombre immédiatement inférieur à celui des racines égales à a ne deviendrait point nul lorsque pour x ou y on substituerait la quantité a, ce qui est contraire à ce que nous avons vu plus haut; si donc une racine se trouve un certain nombre de fois dans un polynome, elle se trouvera une fois de moins dans le polynome dérivé, ce qu'il suffit de savoir pour déterminer les racines égales d'un polynome ainsi que leur degré de multiplicité, et même pour faire voir, s'il en était besoin, que les racines égales d'un polynome se trouvent autant de fois de moins dans un polynome dérivé d'un ordre quelconque, qu'il est marqué par l'ordre de dérivation de ce dernier polynome.

74. Quoique la théorie précédente repose sur la décomposition des polynomes en facteurs du premier degré, il est facile de voir que les conséquences ne seraient point altérées, quand bien même on ne supposerait point cette décomposition, car si P, Q, R sont des facteurs du polynome, la substitution de $x+i$ au lieu de x dans chacun d'eux les changera

respectivement en

$$P + i\,P' + \frac{i^2}{2}\,P'' + \text{etc.}$$

$$Q + i\,Q' + \frac{i^2}{2}\,Q'' + \text{etc.}$$

$$R + i\,R' + \frac{i^2}{2}\,R'' + \text{etc.}$$

. . . . . ,

et le cofficient de la première puissance de i dans leur produit sera égal à la somme de ceux qu'on obtient en multipliant le coefficient de la première puissance de i dans chacun d'eux par le terme indépendant de i dans le produit de tous les autres : par conséquent, si parmi les facteurs P, Q, R, ... dont un polynome se compose, il s'en trouve un certain nombre d'égaux à P, un autre nombre d'égaux à Q, et ainsi de suite, ces mêmes facteurs se trouveront élevés à une puissance moindre d'une unité dans le polynome dérivé, et comme ils ne pourront s'y trouver à une plus haute puissance, il en résulte que quel que soit le degré des facteurs dans lesquels un polynome se décompose, il faut, lorsqu'il y en a plusieurs égaux entre eux, qu'ils se trouvent

dans le polynome dérivé élevés à une puissance moindre d'une unité que dans le polynome proposé, ce qu'il suffit de savoir pour trouver les facteurs égaux d'un polynome, ainsi que leur degré de multiplicité.

75. Il nous reste maintenant à rechercher les moyens propres à faire trouver les racines inégales d'un polynome; mais comme c'est dans l'examen de ce qui se passe dans la marche des accroissemens successifs d'un polynome dont toutes les racines sont inégales, que nous pouvons espérer d'y parvenir, et que c'est dans les diverses circonstances que nous offrent les résultats des substitutions, que nous pouvons reconnaître les nombres entre lesquels chaque racine se trouve, nous allons considérer d'abord ce que devient un polynome qui résulte de la multiplication du produit de plusieurs facteurs simples et inégaux, lorsqu'on fait passer la variable qu'il renferme, par différens états de grandeurs, après quoi il nous sera facile de voir ce qu'il y a à faire pour obtenir les racines d'un polynome quelconque.

Résolution numérique des Équations.

76. Considérons d'abord un polynome qui résulte du produit de plusieurs facteurs simples réels et inégaux $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, et supposons pour plus de simplicité, qu'ils soient disposés dans l'ordre des grandeurs des seconds termes et qu'on y fasse d'abord x plus petit que a, si on y fait croître cette quantité par degrés insensibles, les facteurs varieront aussi par degrés insensibles, et comme les facteurs conserveront le même signe jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la quantité a pour laquelle le facteur $x-a$ devient nul, le produit conservera aussi le même signe et deviendra nul, lorsque pour x on y substituera la quantité a, si on continue à faire croître x, le facteur $x-a$ changera de signe, et comme tous les autres conserveront le leur jusqu'à ce qu'on soit arrivé à b le produit changera de signe, et deviendra nul lorsque pour x on y substituera la quantité b; après quoi, si on fait croître x, le facteur $x-b$ changera de signe, et comme $x-c$, $x-d$, etc. conservent le leur jusqu'à ce qu'on soit arrivé à c, il en résulte, à cause que les facteurs $x-a$, $x-b$ ont des signes différens à ceux qu'ils avaient primitivement, que

le produit aura le même signe que celui qu'on a obtenu lorsqu'on a fait la première substitution. Si on continue à faire croître x, il est facile de voir que chaque fois qu'on passera pardessus une racine, les résultats des substitutions seront de signes contraires, parce qu'il y aura chaque fois un facteur qui changera de signe, tandis que les autres conserveront le leur ; donc aussi le produit changera de signe. En continuant à suivre les résultats des substitutions, on reconnaîtra que toutes les fois qu'il y aura un nombre impair de racines comprises entre les nombres substitués, il y aura nécessairement des résultats de signes contraires, parce qu'un nombre impair de facteurs changeant de signe, le produit doit nécessairement en changer ; lorsqu'au contraire il y aura un nombre pair de racines de comprises entre les nombres substitués, on obtiendra des résultats de même signe, puisqu'il y aura un nombre pair de facteurs qui changeront de signe, et que les autres conserveront dans la seconde substitution ceux qu'ils avaient dans la première.

77. Si on suit avec attention les résultats qu'on obtient lorsqu'on substitue dans le produit de plusieurs facteurs de la nature de ceux que

nous avons considérés, des quantités qui diffèrent infiniment peu entre elles, il est facile de voir que les changemens qu'éprouveront les résultats des substitutions, varieront aussi par degrés insensibles, et que si on substitue pour x des quantités entre lesquelles se trouve une racine, il faudra nécessairement que le passage par zéro ait lieu avant que le passage du positif au négatif ne se manifeste, conclusion qui s'accorde parfaitement avec celle qui résulte de la discussion faite plus haut, mais qui est tout à fait indépendante de cette même discussion, et qui s'applique à un polynome de quelque nature et de quelque degré qu'il soit, car si on représente par P la somme des termes qui ont le signe +, et par — Q la somme des termes qui ont le signe —, et que p et q soient des nombres positifs qui étant substitués, donnent des résultats de signes contraires; il faudrait, si le résultat de la première substitution est positif, que celui de la seconde fût négatif; or, le résultat de la première substitution ne peut être positif, à moins que l'on n'ait $P > Q$, et celui de la seconde substitution ne peut être négatif, à moins que l'on n'ait $P < Q$; mais les polynomes P et Q, par leur nature ne contenant que des puissances entières et positives de la

variable, si on fait passer cette variable par tous les états intermédiaires compris depuis p jusqu'à q, il faudra, à cause que les résultats des substitutions dans les fonctions P et Q croissent par degrés insensibles, que ces mêmes fonctions passent aussi par tous les états intermédiaires qui sont compris entre les résultats des substitutions de p et q dans chacune d'elles; donc aussi la différence P — Q passera par une suite de grandeurs qui différeront entre elles aussi peu qu'on voudra; de sorte que le passage du positif au négatif ne pourra avoir lieu sans qu'elle ne passe par zéro, et par conséquent, à moins qu'il n'y ait au moins une racine de comprise entre les nombres substitués.

78. Ce raisonnement a toute l'étendue et la simplicité qu'on peut desirer, et ne diffère point de celui que nous avons fait plus haut; c'est à l'examen de ce qui se passe lorsqu'un polynome résulte du produit de plusieurs facteurs du premier degré, que l'on en est redevable: néanmoins, comme il pourrait se faire qu'il s'élevât encore quelques doutes sur cette vérité, nous allons, pour la mettre dans un plus grand jour, la démontrer de la manière suivante.

THÉORÈME

THÉORÈME III.

Si dans un polynome qui ne renferme que des puissances entières et positives de x, *on substitue pour cette variable deux nombres, et que les résultats de ces deux substitutions soient de signes contraires, il y aura au moins une racine réelle de comprise entre les deux nombres substitués.*

79. Soit P — Q le polynome proposé, P étant la somme des termes qui ont le signe plus, et — Q la somme des termes qui ont le signe moins; si par chacun des points d'une droite indéfinie et du même côté de cette droite, on conçoit des perpendiculaires dont les longueurs soient respectivement égales aux valeurs que prend la fonction P, lorsque pour x on substitue la distance du pied de chacune d'elles au point A (*fig.* 1), il est évident, à cause qu'il n'y a aucune interruption dans les parties de la droite AB, qu'il ne pourra y en avoir aucune entre les extrémités de ces perpendiculaires : on peut donc concevoir une ligne continue P P′ dont les perpendiculaires

abaissées de chacun de ses points sur la droite AB, représentent les valeurs de la fonction P lorsque pour x on y substitue les distances du pied de ces perpendiculaires au point A; si on conçoit une seconde ligne dont les ordonnées représentent les valeurs de la fonction Q, lorsque pour x on y substitue l'abscisse correspondante, et que le résultat de la première substitution dans le polynome soit positif, auquel cas P est plus grand que Q, il est facile de voir que la seconde ligne passera par un point situé au-dessous de la première; et comme le résultat de la seconde substitution est de signe contraire à celui de la première, on a pour résultat de cette seconde substitution $P < Q$, par conséquent la seconde ligne QQ′ passe par un point situé au-dessus de la première; la seconde ligne ayant des points situés de différens côtés de la première, il faut qu'elle la coupe au moins en un point, et ce point sera nécessairement situé entre les ordonnées qui correspondent aux deux substitutions dont on a parlé, puisque si le point d'intersection ne se trouvait pas entre ces deux ordonnées, il s'ensuivrait qu'à une même valeur de x correspondraient plusieurs valeurs de P ou de Q, ce qui ne peut avoir lieu, puisque P et Q sont

des fonctions rationnelles algébriques entières et positives de x. Il existe donc entre les deux nombres substitués, au moins une valeur de x qui donne $P = Q$ ou $P - Q = o$: j'ai dit au moins une, car la seconde courbe peut passer du dessous de la première au-dessus et du dessus au-dessous pour repasser au-dessus, et ainsi de suite, et tout cela entre les deux ordonnées correspondantes aux deux nombres substitués, ce qui donne en général un nombre impair d'intersections, et par conséquent un nombre impair de racines comprises entre les deux nombres substitués.

80. On peut démontrer ce théorème sans être obligé de recourir à aucune espèce de construction; il suffit, pour cela, de concevoir deux mobiles placés sur une même droite, allant dans le même sens et animés chacun par des forces dont l'intensité varie de telle manière, qu'à chaque instant leurs distances à l'origine de la droite, soient exprimées par les valeurs que prennent les fonctions P et Q lorsque pour x on y substitue le temps. Cela posé, si le résultat de la première substitution est positif on a P plus grand que Q; ainsi le premier mobile se trouve plus éloigné de l'origine de la

droite que le second : mais puisque le résultat de la seconde substitution est de signe contraire à celui de la première, on a pour cette seconde substitution P plus petit que Q; ainsi le second mobile, après avoir été en arrière du premier par rapport à l'origine de la droite sur laquelle ils se meuvent, se trouve ensuite plus avancé que lui, ce qui ne peut avoir lieu à moins qu'ils ne se soient rencontrés un nombre impair de fois; par conséquent il existe un nombre impair d'instans entre ceux qui correspondent aux résultats des deux substitutions qui donnent $P = Q$ ou $P - Q = o$.

81. Nous avons supposé dans ce qui précède, que les deux nombres substitués étaient positifs, mais s'ils étaient tous deux négatifs, ou l'un positif et l'autre négatif, cela aurait encore lieu. Car si on les suppose tous deux négatifs et qu'on les substitue au lieu de x, on obtiendra le même résultat que si on avait substitué ces mêmes quantités prises positivement dans le polynome, après avoir changé les signes des termes affectés de puissances impaires de x. Ainsi, puisque les résultats des deux substitutions dans le polynome proposé, sont de signes contraires, il en résulte que les deux

mêmes quantités prises positivement, étant substituées dans le polynome après avoir changé les signes des puissances impaires de x, donneront aussi des résultats de signes contraires. Or, le changement de signe des puissances impaires de x dans le polynome, revient à changer les racines positives en négatives, et réciproquement ; ainsi, puisque le polynome transformé a un nombre impair de racines comprises entre les nombres substitués pris positivement, il en résulte que le polynome proposé a un nombre impair de racines comprises entre les deux nombres substitués.

Si des deux nombres, l'un d'eux seulement était positif, le théorème n'en aurait pas moins lieu, car les résultats des deux substitutions étant de signes contraires, l'un des nombres est de même signe que le dernier terme, et l'autre de signe contraire à ce dernier terme; mais si pour x dans le polynome on substitue zéro, le résultat se réduit au dernier terme; ainsi, zéro et l'un des nombres substitués donnant des résultats de signes contraires, il s'ensuit que le polynome a au moins une racine réelle positive de comprise entre zéro et l'un des nombres

substitués, et à plus forte raison entre les deux nombres substitués.

82. Si entre deux nombres substitués il y a un nombre impair de racines inégales de comprises, les résultats des substitutions de ces deux nombres seront de signes contraires ; car si on a recours à la construction dont nous avons fait usage dans le théorème précédent, pour représenter la marche des fonctions P et Q, on verra facilement que les deux courbes qui les représentent, ne peuvent avoir un nombre impair de points d'intersection entre les ordonnées qui correspondent aux deux nombres substitués, à moins que les extrémités des ordonnées qui appartiennent à l'une des courbes, ne soient de différens côtés de l'autre courbe, puisque si cela n'avait point lieu, il y aurait un nombre pair d'intersections, et par conséquent un nombre pair de racines comprises entre les nombres substitués.

Il pourrait se faire cependant que les deux courbes se touchassent avant de se couper, ce qui ferait qu'il y aurait un nombre pair de racines distinctes de comprises entre les nombres substitués. Mais cette circonstance n'apporte

aucun changement à la conclusion que nous avons énoncée plus haut, parce que chaque point de tangence correspondant à un nombre pair de racines égales, il en résulte qu'il y a en tout un nombre impair de racines comprises entre les deux nombres substitués; ces racines à la vérité ne sont point distinctes, mais elles n'en existent pas moins pour cela : d'ailleurs toutes les conclusions que nous avons à tirer, ne portant que sur des polynomes dégagés de racines égales, il n'y a aucune espèce d'inquiétude à avoir sur les conséquences que nous en déduirons par la suite.

83. Si on suit les diverses circonstances qui se présentent lorsque les deux courbes ont des points communs entre les ordonnées qui correspondent aux nombres substitués, soit en se coupant ou en se touchant, on y lira tout ce que l'équation offre de particulier, soit sur le nombre des racines réelles positives, ou sur les signes des résultats des substitutions. Comme cette discussion n'offre pas de difficultés, nous n'entrerons point dans de plus grands développemens; on y verra aussi que si un polynome ne change jamais de signe, l'une des courbes ne pourra jamais couper l'autre, et

qu'ainsi il ne peut avoir de racines réelles ; puisqu'on suppose le polynome dégagé de racines égales ; mais si les deux courbes se touchaient sans se couper, le polynome aurait des systèmes de racines réelles égales dont le degré de multiplicité serait pair.

84. Si on rapproche ce qu'on a démontré plus haut [50] du théorème précédent, il sera facile d'en déduire qu'un polynome peut toujours être considéré comme résultant du produit de plusieurs facteurs réels du premier degré, ou comme provenant du produit de plusieurs de ces facteurs, par un polynome qui ne change jamais de signe, quelle que soit la quantité réelle qu'on y substitue, si toutefois le polynome proposé n'est point de cette dernière espèce ; car l'existence d'une racine étant bien établie, lorsque pour la substitution de deux quantités, on obtient des resultats de signes contraires, et l'existence d'une racine entraînant celle d'un facteur réel du premier degré, il en résulte que si le polynome proposé ne jouit point de la propriété de conserver le même signe, quelle que soit la quantité qu'on y substitue, on pourra le considérer comme résultant du produit d'un

facteur réel du premier degré par un facteur d'un degré moindre d'une unité ; si ce dernier polynome ne jouit point de la propriété de conserver toujours le même signe, quelle que soit la quantité qu'on substitue pour la variable, on pourra le regarder comme étant le produit d'un facteur réel du premier degré, par un facteur d'un degré moindre d'une unité ; par conséquent le polynome proposé pourra être considéré comme étant le produit de deux facteurs réels du premier degré, par un facteur d'un degré moindre de deux unités. En continuant de raisonner de la même manière, on arrivera de proche en proche à faire voir qu'un polynome est le produit d'autant de facteurs réels du premier degré, qu'il est marqué par le degré du polynome ou le produit d'un certain nombre de facteurs réels du premier degré, par un polynome qui conserve toujours le même signe, quelle que soit la quantité qu'on y substitue, à moins qu'il ne soit de cette dernière espèce.

85. Cette propriété qu'un polynome peut avoir de ne point changer de signe, quelle que soit la grandeur qu'on substitue pour la variable, n'exclut point pour cela l'existence des fac-

teurs réels du premier degré, puisqu'un polynome dont les facteurs réels sont élevés à des puissances paires, ne peut changer de signe, quels que soient la grandeur et le signe de la quantité qu'on y substitue ; ainsi non-seulement un polynome se compose comme nous l'avons énoncé plus haut [84], mais il peut toujours être considéré, lorsqu'il n'est point le produit d'autant de facteurs réels du premier degré qu'il est marqué par le degré du polynome, comme étant le produit d'un certain nombre de facteurs réels du premier degré, par un polynome qui n'admet aucune racine réelle, si toutefois le polynome proposé n'est point de cette dernière espèce, ce qu'on reconnaîtra à ce qu'il ne changera jamais de signe, ainsi que le polynome dérivé, quelle que soit la quantité qu'on substitue pour la variable.

86. De la décomposition d'un polynome en ses facteurs, soit qu'ils soient tous réels et du premier degré, ou qu'ils soient en partie réels du premier degré, et en partie de la nature de ceux qui ne changent jamais de signe, il suit que si deux quantités sont substituées dans une équation, et donnent des résultats de signes

contraires, il y a toujours un nombre impair de racines comprises entre ces deux quantités; car si on désigne par p la plus petite des deux quantités qu'on substitue, et par q la plus grande, les facteurs simples du premier degré qui correspondent aux racines plus petites que p, s'il y en a, auront le même signe, soit qu'on y substitue p ou q; les facteurs qui correspondent aux racines plus grandes que q, s'il s'en trouve, conserveront le même signe lorsqu'après y avoir substitué p, on y substituera q : ainsi, soit que le polynome résulte du produit de plusieurs facteurs du premier degré seulement, ou du produit de facteurs du premier degré, par un polynome qui conserve le même signe, quelle que soit la quantité qu'on substitue, le changement de signe ne peut provenir que de celui du produit d'un nombre impair de facteurs dont les seconds termes sont compris entre p et q; et comme tous ces facteurs changent de signe, lorsqu'après la substitution de p on y substitue q, il s'ensuit qu'il y a nécessairement un nombre impair de racines plus grandes que p et plus petites que q, et par conséquent un nombre impair de racines comprises entre les nombres substitués.

87. Nous avons supposé dans ce qui précède, que le polynome ne contenait pas de facteurs égaux; mais s'il en contenait, le contraire pourrait avoir lieu, c'est-à-dire, qu'entre deux nombres qui donnent des résultats de signes contraires, il pourrait y avoir un nombre pair de racines de comprises; il suffirait pour cela, que parmi les facteurs différens qui correspondent aux racines comprises entre les deux nombres substitués, il y en ait un nombre impair qui fussent élevés à des puissances impaires et un nombre impair qui fussent élevés à des puissances paires; car les substitutions des deux nombres changeant les signes des puissances impaires des facteurs du premier système, leur produit changera aussi, et comme les facteurs du second système sont élevés à des puissances paires, le produit du premier système par le second changera; mais au premier système de facteurs correspond un nombre impair de racines, et comme au second système de facteurs correspond aussi un nombre impair de racines distinctes, il en résulte qu'il y a en tout un nombre pair de ces racines de comprises entre les deux nombres substitués.

88. Il suit aussi de la décomposition d'un polynome en facteurs réels, que si les substitutions de deux nombres dans un polynome donnent des résultats de même signe, il n'y a point de racines comprises entre les deux nombres substitués, à moins qu'elles ne soient en nombre pair, car si p est la plus petite des deux quantités qu'on substitue, et que q soit la plus grande, tous les facteurs qui correspondent aux racines plus petites que p, ne changeront pas de signe, soit qu'on y substitue p ou q, et comme les facteurs qui correspondent aux racines plus grandes que q ont le même signe, soit qu'on y substitue p ou q, il faut qu'il n'y ait pas de facteurs dont les racines soient comprises entre les nombres substitués, ou qu'ils soient en nombre pair, afin que le polynome ne change pas de signe, ce qui exige qu'il n'y ait pas de racines comprises entre p et q, ou qu'il y en ait un nombre pair. Cependant il pourrait se faire que les résultats des substitutions des deux nombres soient de même signe, et qu'il y ait un nombre impair de racines comprises entre ces deux nombres; cela aurait lieu si parmi les facteurs qui correspondent aux racines comprises entre les deux nombres subs-

titués, il y avait un nombre pair de facteurs inégaux élevés à des puissances impaires, et un nombre impair des autres facteurs élevés à des puissances impaires, car chaque système changeant de signe par la substitution des quantités p et q, leur produit n'en change pas; ainsi, puisqu'à chaque système correspond un nombre pair de racines inégales, et qu'au second correspond un nombre impair d'autres racines, et que d'ailleurs les unes et les autres sont comprises entre les deux nombres substitués, il en résulte qu'il y a en tout un nombre impair de racines inégales comprises entre les nombres substitués.

89. Les réciproques des propositions énoncées dans les paragraphes précédens sont également vraies, c'est-à-dire, que si un polynome a un nombre impair de racines comprises entre deux nombres, les résultats des substitutions de ces deux nombres seront de signes contraires, et que si le polynome a un nombre pair de racines comprises entre deux quantités, les résultats des substitutions de ces deux quantités seront de même signe; c'est ce qu'on aperçoit sur-le-champ : car dans le premier cas, les facteurs qui correspondent aux ra-

cines comprises entre les deux nombres substitués étant les seuls qui changent de signe lorsqu'on substitue l'un des nombres à l'autre, il en résulte qu'ils sont en nombre impair, et que les résultats des deux substitutions sont de signes contraires; dans le second cas, les facteurs qui correspondent aux racines comprises entre les deux nombres substitués étant aussi les seuls qui changent de signe, lorsqu'après avoir substitué l'un des nombres, on y substitue l'autre, il en résulte, à cause qu'ils sont en nombre pair, que les résultats des deux substitutions conservent le même signe.

90. Il pourrait se faire néanmoins que dans le dernier cas il y eût un nombre impair de racines distinctes dont le degré de multiplicité soit pair, et un nombre impair d'autres racines dont le degré de multiplicité soit impair. Si cela avait lieu, les deux substitutions auraient le même signe; car aux premières racines correspondrait un nombre impair de facteurs élevés à des puissances paires; et aux secondes correspondrait un nombre pair de facteurs élevés à des puissances impaires, ce qui ferait que les résultats des deux substitutions, au lieu d'être de signes contraires, se-

raient de même signe; mais cette exception, ainsi que celle qui a lieu pour l'autre cas, ne porte aucune atteinte aux conclusions que nous tirerons par la suite, parce que nous supposerons dans tout ce qui va suivre, que les polynomes sont toujours dégagés des racines égales qu'ils peuvent contenir, à moins que nous n'avertissions du contraire.

91. Lorsqu'un polynome est dégagé de facteurs égaux, et qu'il ne change jamais de signe, il ne peut admettre de racines réelles; car s'il en avait, on pourrait concevoir deux nombres entre lesquels se trouverait seulement une racine, et les substitutions de ces deux nombres à la place de x, donneraient des résultats de signes contraires; par conséquent le polynome ne conserverait pas toujours le même signe, ce qui est contre l'hypothèse: c'est ce qu'on peut reconnaître encore à l'aide de la représentation géométrique que nous avons donnée des fonctions P et Q [79]; car si les deux courbes avaient des points communs, l'une d'elles couperait nécessairement l'autre, puisqu'elles ne peuvent se toucher, à cause de l'inégalité de toutes les racines; par conséquent les ordonnées qui suivent et qui précèdent

cèdent immédiatement le point d'intersection, et qui appartiennent à l'une des courbes, seraient d'une part plus petites que les ordonnées correspondantes de l'autre courbe, tandis que celles de l'autre part seraient plus grandes que les ordonnées correspondantes de l'autre courbe; de sorte que les résultats des deux substitutions seraient de signes contraires, ce qui ne peut avoir lieu.

THÉORÈME IV.

Lorsqu'un polynome rationnel n'a qu'une seule variation de signe, il a une racine réelle positive, et ne peut en avoir un plus grand nombre.

92. Le polynome proposé n'ayant qu'une seule variation de signe, il faut que tous les termes positifs se succèdent sans interruption aussi bien que les termes négatifs; si on suppose que le premier terme ait le signe +, on pourra représenter la somme des termes positifs par

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + Mx^r,$$

et la somme des termes négatifs pris positivement par

$$Nx^{r-1} + Px^{r-2} + Qx^{r-3} \ldots\ldots + V,$$

x^r est la plus faible puissance de x qui se trouve parmi les termes positifs. Cela posé, si on substitue zéro au lieu de x dans le polynome, le résultat de cette substitution se réduira à son dernier terme qui est négatif; ensuite on conçoit qu'il est toujours possible de trouver une quantité assez grande pour que le premier terme l'emporte sur la somme de tous les termes négatifs, à cause de la rapidité avec laquelle croissent les diverses puissances d'un même nombre, et d'ailleurs, parce qu'il suffit, pour que cela ait lieu, qu'on détermine la quantité x, de manière qu'on ait, en désignant par S, le plus grand coefficient pris positivement

$$x^m = \text{ou} > \frac{Sx^r}{x-1},$$

puisque $\frac{Sx^r}{x-1}$ surpasse toujours la somme des termes négatifs du polynome,

or x^m sera $=$ ou $>$ que $\frac{Sx^r}{x-1}$,

si $x^{m-r}(x-1)$ est $=$ ou $>$ que S,

et à plus forte raison si

$\{x-1\}^{m-r}\{x-1\}$ est $=$ ou $>$ que S,

ou si $x-1=$ ou $>$ que $\sqrt[m-r+1]{S}$,

et par suite, si x est $=$ ou $>$ que

$$1+\sqrt[m-r+1]{S};$$

ainsi les résultats des substitutions de zéro et de $1+\sqrt[m-r+1]{S}$ étant de signes contraires, il en résulte qu'il y a au moins une racine réelle positive de comprise entre les nombres substitués.

Soit a une de ces racines; si on met le polynome proposé sous la forme suivante

$$x^r.\left\{\begin{array}{l} x^{m-r}+Ax^{m-r-1}+Bx^{m-r-2}+\ldots+M \\ -\frac{N}{x}-\frac{P}{x^2}-\frac{Q}{x^3}-\ldots-\frac{V}{x^r}\end{array}\right\}$$

et que l'on y substitue a à la place de x, le second facteur deviendra nul, par conséquent la somme des termes positifs sera égale à celle des termes négatifs. Mais si on fait croître x au-delà de la quantité a, la somme des termes positifs croîtra, et celle des termes négatifs

décroîtra, puisque la première somme se compose d'une suite de termes affectés de puissances entières et positives de x, et que la seconde se compose d'une suite de fractions dont les numérateurs sont constans et dont les dénominateurs sont des puissances positives de x; par conséquent le second facteur sera positif et croîtra avec x, et comme le premier croît aussi, la substitution d'une quantité plus grande que a donnera un résultat positif. Maintenant si on fait décroître x au-dessous de a, la somme des termes positifs dont se compose le second facteur, ira en diminuant, tandis que celle des termes négatifs ira en augmentant : ainsi la somme des termes négatifs l'emportera sur celle des termes positifs ; par conséquent, le polynome ne peut avoir de racines réelles positives plus grandes ni plus petites que a; si donc il ne peut avoir plusieurs racines égales à a, le théorème s'ensuivra nécessairement. Pour y arriver nous observerons que si la racine a se trouvait plusieurs fois dans le polynome proposé, la substitution de a à la place de x dans le polynome dérivé, le rendrait nul, de sorte qu'on aurait

$$ma^m + m-1.\,Aa^{m-1} + m-2.\,Ba^{m-2} + \ldots. rMa^r =$$
$$r-1.\,Na^{r-1} + r-2.\,Pa^{r-2} + r-3.\,Qa^{r-3} + \ldots. Ta$$

or

$$a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + \ldots + Ma^r,$$

étant égal à

$$Na^{r-1} + Pa^{r-2} + Qa^{r-3} + \ldots + V,$$

on aura

$$\{r-1\}\{a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + \ldots + Ma^r\} =$$
$$\{r-1\}\{Na^{r-1} + Pa^{r-2} + Qa^{r-3} + \ldots + V\}.$$

Mais le second membre de cette dernière équation surpasse le second membre de la première équation; le premier membre de la dernière équation pourrait donc surpasser le premier membre de la première équation, ce qui est absurde, puisqu'au contraire il est surpassé par lui; donc il est pareillement impossible que la racine a se trouve plusieurs fois dans le polynome proposé. Ainsi, si un polynome n'a qu'une variation de signe, il a et ne peut avoir qu'une seule racine réelle positive.

93. L'analyse précédente fait voir que si une quantité substituée pour x dans un polynome quelconque rend le premier terme plus grand que la somme des termes néga-

tifs, toute quantité plus grande qu'elle, jouira aussi de cette même propriété, et par suite rendra la somme des termes positifs du polynome plus grande que la somme des termes négatifs, quel que soit l'ordre dans lequel les signes se succèdent. Ainsi puisqu'en extrayant du plus grand coefficient négatif pris positivement, une racine d'un degré marqué par le complément du plus haut exposant de x dans les termes négatifs au degré du polynome, et ajoutant l'unité, on obtient une quantité qui donne, pour le premier terme, une quantité plus grande que la somme de tous les termes négatifs, il en résulte que la substitution de cette quantité et de toute autre plus grande qu'elle, jouira encore de cette même propriété, de sorte qu'au-delà de la première quantité il ne peut y avoir aucune racine réelle positive.

Quant à la détermination de cette limite, on peut y arriver encore de la manière suivante, qui aura sur celle qui précède, l'avantage de montrer ce que le premier terme du polynome est par rapport à la somme de tous les autres.

94. Supposons que le polynome soit

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots + Tx + V,$$

et qu'il y ait un nombre n de termes positifs avant le premier terme négatif, on aura

$$x^m = x^m - x^{n-1} + x^{n-1};$$

et comme

$$x^m - x^{n-1} = x^{n-1}\,(x^{m-n+1} - 1),$$

et que d'ailleurs le second membre de cette dernière égalité est égal à

$$x^{n-1}\,\{x^{m-n} + x^{m-n-1} + \ldots + 1\}\,\{x - 1\},$$

il en résulte que x^m est égal à

$$x^{n-1}\{x-1\}\,\{x^{m-n} + \ldots + 1\} + x^{n-1};$$

et comme les puissances successives de x, qui se trouvent dans la dernière parenthèse, sont toutes multipliées par $x^{n-1}\{x-1\}$, il en résulte que si cette dernière quantité est égale ou plus grande que le plus grand des coefficiens négatifs, que nous désignerons par S, le premier terme l'emportera sur la somme des termes négatifs : or, pour satisfaire à cette inégalité, il suffit de faire ensorte qu'on ait

$$(x-1)^n = \text{ou} > S,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x - 1 = \text{ou} > \sqrt[n]{S},$$

où enfin

$$x = \text{ou} > 1 + \sqrt[n]{S};$$

d'où l'on voit, comme plus haut, que si du plus grand coefficient négatif on prend une racine d'un degré marqué par le nombre des termes positifs qui se trouvent avant le premier terme négatif, et qu'on lui ajoute l'unité ou une quantité plus grande, on aura une quantité qui, étant substituée pour la variable dans le polynome, rendra le premier terme plus grand que la somme de tous les termes négatifs, et à plus forte raison, la somme des termes positifs plus grande que celle des termes négatifs.

95. Si on suppose que le second terme du polynome soit négatif, $n = 1$ et $1 + \sqrt[n]{S}$ devient égal à $S + 1$; de sorte que dans ce cas le plus grand coefficient négatif pris positivement et augmenté de l'unité, sera la limite supérieure des racines positives du polynome.

C'est ce qu'on peut vérifier immédiatement, car le premier terme x^m étant égal à $x^m - 1 + 1$, on a

$$x^m = \{ x - 1 \} \{ x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1 \} + 1,$$

Or, sous cette forme on voit que si on y substitue $S+1$ pour x, le résultat de cette substitution surpassera la somme des termes négatifs de l'unité, en supposant que ces derniers aient tous le même coefficient; mais si au lieu de $S+1$ on substitue une quantité moindre que $S+1$ d'une très-petite quantité Δ, le résultat de cette substitution dans le premier terme, différera de la somme de termes négatifs d'une quantité qui sera ce que devient

$$-\Delta\{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1\}+1,$$

lorsque pour x on y substitue $S+1-\Delta$; or la partie négative croîtra d'autant plus rapidement, que le nombre m sera plus considérable, et, comme on peut le concevoir, assez grand pour qu'elle soit plus grande que l'unité, de quelque petitesse d'ailleurs qu'on prenne Δ. On voit, à cause de l'indétermination de m, que $S+1$ est, à proprement parler, la limite des racines du polynome d'un degré quelconque, le mot limite étant pris dans l'acception qu'on lui donne communément, puisqu'on ne peut assigner une quantité moindre que $S+1$ au-dessus de laquelle il ne soit possible de faire tomber une racine

en prenant le nombre m suffisamment grand ; mais c'est par extension qu'on a donné le nom de limite à l'expression que nous avons trouvée plus haut [94].

96. Si on voulait avoir la limite supérieure des racines négatives, il faudrait transformer le polynome en un autre dont les racines fussent égales et de signes contraires, car la limite supérieure des racines positives du polynome transformé, prise en moins, sera la limite supérieure des racines négatives du polynome proposé.

97. Le plus souvent il arrive que les coefficiens négatifs du polynome sont inégaux entre eux et que plusieurs termes positifs sont mêlés avec les termes négatifs, et que de plus, les coefficiens des termes compris entre le premier terme positif et le premier négatif ne sont point nuls : ainsi on conçoit que la quantité qu'on vient d'assigner comme ne pouvant avoir de racines au-dessus d'elle, est souvent éloignée de la plus grande racine, et qu'elle l'est d'autant plus, que les termes positifs sont en plus grand nombre, et qu'ils sont affectés de puissances plus élevées de la variable et de plus

grands coefficiens : on peut par différens moyens obtenir d'autres limites qui souvent sont plus rapprochées. Newton en a donné un qui conduit très-souvent à une limite assez peu différente de la plus grande racine; pour y arriver nous commencerons d'abord par observer que si toutes les racines d'un polynome sont réelles et qu'on les diminue toutes de la plus grande, le polynome qui aura ces différences pour racines, n'aura que des racines négatives, de sorte que les coefficiens des différentes puissances de la variable seront tous positifs, puisque le polynome transformé sera le produit de facteurs de la forme $y + a$, $y + b$, $y + c$, etc.; et réciproquement, si les coefficiens d'un polynome sont tous positifs, aucune racine réelle de ce polynome ne peut être positive, puisque la somme d'une suite de termes positifs ne peut être nulle ; par conséquent si on diminue les racines du polynome d'une quantité arbitraire, ce que l'on fera en substituant $a + y$ au lieu de x, et que l'on dispose de cette quantité a, de manière que le polynome qui en résulte ait tous ses coefficiens positifs, on aura une quantité au-dessus de laquelle aucune racine ne pourra se trouver, et par conséquent une limite des ra-

cines positives, laquelle s'éloignera d'autant moins de la plus grande racine, lorsque toutes sont réelles, qu'elle rendra les coefficiens des différentes puissances de y plus petits; on facilitera cette recherche, en observant que les coefficiens des puissances de y sont ce que deviennent les polynomes dérivés des ordres successifs du polynome proposé, divisés par le produit de la suite naturelle des nombres, jusqu'à celui qui indique l'ordre de dérivation du polynome lorsque pour x on y substitue la quantité a; si donc

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Tx + V$$

est le polynome proposé, les polynomes dérivés des ordres $m-1$, $m-2$, $m-3$, divisés par le produit de la suite naturelle des nombres jusqu'à celui qui indique l'ordre de dérivation, seront

$$mx + A$$

$$\frac{m.m-1}{2}x^2 + m-1.Ax + B$$

$$\frac{m.m-1.m-2}{2.3}x^3 + \frac{m-1.m-2}{2}Ax + m-2.Bx + C$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de sorte que si on trouve une quantité qui jouisse de la propriété de rendre toujours positifs ces

différens polynomes, en commençant par ceux dont le degré est le moins élevé, afin de s'éloigner le moins possible de la plus grande racine, on aura un nombre au-dessus duquel aucune racine positive ne pourra se trouver, et que l'on désigne communément sous le nom de limite supérieure des racines positives. Quant à la possibilité de rendre positifs ces différens polynomes, même lorsque toutes les racines ne sont point réelles, elle ne peut être révoquée en doute, puisqu'on peut toujours en trouver une qui rende le premier terme de chaque polynome plus grand que la somme des termes négatifs [94] et, qu'il suffit de prendre, parmi les quantités qui rempliront ces conditions, la plus grande de toutes.

98. Cette méthode a sur la précédente l'avantage de donner une limite qui est souvent plus rapprochée, mais elle a l'inconvénient d'entraîner dans des opérations assez longues, au lieu que celle qui la précède donne cette limite immédiatement sans aucun calcul, et à l'inspection seule des coefficiens.

99. Si on veut avoir la limite inférieure des racines d'un polynome, on le transformera en un

autre dont les racines soient les réciproques du polynome proposé, on divisera l'unité par la limite supérieure des racines positives du polynome transformé, et on aura la limite inférieure des racines positives du polynome proposé, si la limite supérieure du polynome transformé se rapporte aux racines positives, et la limite inférieure des racines négatives, si la limite inférieure du polynome transformé se rapporte à celle des racines négatives, ce qui est évident; car si a, b, c, d sont des racines du polynome proposé, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, seront celles du polynome transformé, et comme à la plus petite racine du polynome proposé correspond la plus grande racine du polynome transformé, il en résulte que si a, par exemple, est la plus petite des racines du premier polynome, $\frac{1}{a}$ sera la plus grande des racines du second; par conséquent, si on désigne par S′ le plus grand coefficient négatif de ce second polynome, abstraction faite du signe, on aura

$$S' + 1 > \frac{1}{a}$$

et par suite

$$a > \frac{1}{S' + 1}.$$

Quant à la détermination de S'_2 il est bon d'observer qu'on peut toujours l'obtenir sans être obligé d'effectuer aucune substitution, et qu'il suffira pour cela, lorsque le dernier terme du polynome proposé sera positif, de diviser le plus grand coefficient négatif par ce dernier terme, et lorsqu'il sera négatif, de changer tous leurs signes, puis de diviser le plus grand coefficient négatif par le coefficient du dernier terme pris, abstraction faite du signe; cela s'aperçoit sur-le-champ, puisque les coefficiens du polynome transformé sont ceux du polynome proposé, divisés par le dernier terme.

THÉORÈME V.

Tout polynome de degré impair a nécessairement une racine réelle d'un signe contraire à celui de son dernier terme, et tout polynome d'un degré pair dont le dernier terme est négatif en a au moins deux, l'une positive et l'autre négative.

100. Ce théorème est une suite nécessaire de celui qui précède; car si on considère d'abord un polynome de degré impair dont le dernier

terme soit négatif, et qu'on substitue zéro pour la variable, le résultat sera négatif; mais si on y substitue le plus grand coefficient négatif, pris positivement et augmenté de l'unité, on aura un résultat positif, c'est-à-dire, un résultat de signe contraire à celui de la première substitution; par conséquent il aura au moins une racine réelle positive, c'est-à-dire une racine réelle d'un signe contraire à celui de son dernier terme. Si le dernier terme est positif, et que l'on change les signes des termes affectés des puissances paires de x, on aura un polynome de degré impair dont le dernier terme sera négatif, et qui aura au moins une racine réelle positive; et comme les racines de ce polynome, prises en moins, sont les racines du premier, il en résulte que lorsque le dernier terme est positif, le polynome a nécessairement une racine réelle négative, et par conséquent, comme dans le premier cas, une racine réelle d'un signe contraire à celui de son dernier terme.

Si le polynome est de degré pair, et qu'on substitue zéro pour la variable, il se réduira à son dernier terme, et comme il est négatif par hypothèse, le résultat de cette substitution

Quant à la détermination de S'_2, il est bon d'observer qu'on peut toujours l'obtenir sans être obligé d'effectuer aucune substitution, et qu'il suffira pour cela, lorsque le dernier terme du polynome proposé sera positif, de diviser le plus grand coefficient négatif par ce dernier terme, et lorsqu'il sera négatif, de changer tous leurs signes, puis de diviser le plus grand coefficient négatif par le coefficient du dernier terme pris, abstraction faite du signe; cela s'aperçoit sur-le-champ, puisque les coefficiens du polynome transformé sont ceux du polynome proposé, divisés par le dernier terme.

THÉORÈME V.

Tout polynome de degré impair a nécessairement une racine réelle d'un signe contraire à celui de son dernier terme, et tout polynome d'un degré pair dont le dernier terme est négatif en a au moins deux, l'une positive et l'autre négative.

100. Ce théorème est une suite nécessaire de celui qui précède; car si on considère d'abord un polynome de degré impair dont le dernier

terme soit négatif, et qu'on substitue zéro pour la variable, le résultat sera négatif; mais si on y substitue le plus grand coefficient négatif, pris positivement et augmenté de l'unité, on aura un résultat positif, c'est-à-dire, un résultat de signe contraire à celui de la première substitution; par conséquent il aura au moins une racine réelle positive, c'est-à-dire une racine réelle d'un signe contraire à celui de son dernier terme. Si le dernier terme est positif, et que l'on change les signes des termes affectés des puissances paires de x, on aura un polynome de degré impair dont le dernier terme sera négatif, et qui aura au moins une racine réelle positive; et comme les racines de ce polynome, prises en moins, sont les racines du premier, il en résulte que lorsque le dernier terme est positif, le polynome a nécessairement une racine réelle négative, et par conséquent, comme dans le premier cas, une racine réelle d'un signe contraire à celui de son dernier terme.

Si le polynome est de degré pair, et qu'on substitue zéro pour la variable, il se réduira à son dernier terme, et comme il est négatif par hypothèse, le résultat de cette substitution

tution sera négatif ; mais si on y substitue le plus grand coefficient négatif, pris positivement et augmenté de l'unité, le résultat de cette substitution sera positif, c'est-à-dire, de signe contraire au premier ; ainsi il aura au moins une racine réelle positive. Si on change les signes des puissances impaires de x, on aura un polynome de degré pair dont le dernier terme sera négatif, et qui aura au moins une racine réelle positive, et comme cette racine, prise en moins, rendra nul le polynome primitif, il en résulte que le dernier polynome aura au moins une racine réelle négative, ce que d'ailleurs on peut encore voir autrement : car si on divise le polynome proposé par le facteur qui correspond à la racine positive, on aura un polynome de degré impair dont le dernier terme sera positif, et qui par conséquent aura une racine négative ; et comme les racines de ce polynome rendent nul le premier, il en résulte que celui-ci a aussi une racine négative ; ainsi tout polynome de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins, comme on l'a énoncé, deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.

101. Il suit de ce théorème, que si on divise

un polynome dégagé de racines égales, par le produit des facteurs qui correspondent aux racines réelles, le quotient qui en résultera sera un polynome de degré pair, dont le dernier terme sera positif, et tel qu'aucune grandeur substituée pour la variable ne pourra donner un résultat négatif. D'abord il sera de degré pair, car s'il était de degré impair, il aurait au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme, et par conséquent il ne serait pas le quotient du polynome par le produit de tous les facteurs qui correspondent aux racines réelles, ce qui est contre l'hypothèse : de plus, il faut que le dernier terme soit positif, car s'il était négatif, le quotient aurait au moins deux racines réelles de signes contraires, ce qui ne peut avoir lieu; enfin il ne pourra devenir négatif, par aucune valeur numérique substituée à la place de x, car si cela avait lieu, il faudrait, à cause que le résultat de la substitution de zéro au lieu de x est positif, qu'il eût au moins une racine réelle positive, ce qui est contre la supposition.

102. On peut reconnaître au signe du dernier terme, si les racines réelles positives sont en nombre pair ou impair : en effet, le dernier terme d'un polynome est le produit des seconds termes

des facteurs du premier degré qui correspondent aux racines réelles par le dernier terme du quotient qu'on obtient en divisant le polynome proposé par le produit de tous ces facteurs. Or le dernier terme du quotient est toujours positif ; si donc le dernier terme est négatif, il faut que le produit des seconds termes des facteurs réels du premier degré soit négatif, et que par suite il y ait un nombre impair de ces seconds termes qui soient négatifs, ce qui ne peut avoir lieu, à moins que le polynome n'ait un nombre impair de racines réelles positives. Si le dernier terme est positif, il faut que le produit des seconds termes des facteurs réels du premier degré soit positif, ou qu'il y ait un nombre pair de ces seconds termes qui aient le signe moins, ce qui exige qu'il y ait un nombre pair de racines réelles positives.

103. Lorsqu'un polynome dont les coefficiens sont des nombres, ne peut admettre de racines réelles, il faut bien se garder de croire pour cela qu'aucune substitution ne puisse jouir de la propriété de rendre nul ce polynome, ou qu'il ne puisse avoir de racines ; c'est ce qu'on voit parfaitement pour les polynomes des second et quatrième degrés, car les ex-

pressions générales des racines de ces polynomes jouissant de la propriété de les rendre nuls par le seul effet des réductions algébriques, ou de l'opposition des signes, jouissent encore de cette même propriété, lorsque les coefficiens ont des relations qui empêchent ces expressions de se réduire à des quantités réelles; c'est ce qu'on voit encore par l'expression des racines des polynomes à deux termes, lorsqu'ils sont dégagés des facteurs qui correspondent aux racines réelles qu'ils peuvent contenir, ainsi que par celles qui peuvent se ramener à la forme de ceux des second, troisième et quatrième degrés.

104. Si on observe la forme constante sous laquelle les racines des polynomes de degré pair se présentent lorsque tous les coefficiens sont positifs et égaux à l'unité, soit qu'on les prenne tous en plus, ou alternativement en plus et en moins, et que de plus l'on considère que ces racines doivent résulter de l'expression générale de celles des polynomes de même degré, on ne tardera point à penser que cette forme est aussi celle à laquelle toutes les racines doivent se réduire lorsque le polynome n'en comporte pas de réelles. Cette idée qui

se vérifie immédiatement sur les polynomes des second et quatrième degrés, ainsi que sur ceux dont les racines dépendent de celles des polynomes de la forme du second, du troisième et du quatrième degré, acquiert donc un degré de vraisemblance de plus qu'elle n'avait auparavant, c'est à la constater dans toute son étendue, que le théorème suivant est réservé.

THÉORÈME VI.

Lorsqu'un polynome de degré pair n'admet aucune racine réelle, il existe au moins une quantité r *et un angle* φ *qui font de*

$$r\{\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1}\},$$

une racine de ce polynome.

105. Soit $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Tx+V$, un polynome de degré pair que nous supposerons dégagé de facteurs égaux.

Si pour x on y substitue

$$r\{\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}\},$$

on aura

$$r^m\cos m\varphi+Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi+\ldots+T\cos\varphi+V$$
$$+\{r^m\sin m\varphi+Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi+\ldots B\sin\varphi\}\sqrt{-1};$$

par conséquent, si la quantité r et l'angle φ peuvent se déterminer de manière à rendre nul ce résultat, $r\{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\}$ sera racine du polynome proposé ; or le résultat précédent ne peut être nul, à moins que la somme des termes qui ne sont pas multipliés par $\sqrt{-1}$, ne soit nulle, et que celle des termes qui sont multipliés par cette même quantité, ne soit égale à zéro : ainsi la difficulté est ramenée à faire voir qu'on peut toujours trouver une quantité r et un angle φ qui jouissent de la propriété de rendre nuls en même temps les deux polynomes

$$r^m\cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \ldots + Tr\cos\varphi + V$$
$$r^m\sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \ldots + Tr\sin\varphi.$$

Réciproquement, si ces deux polynomes deviennent nuls en même temps, par la substitution d'une même quantité r et du même angle φ l'expression $r\{\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}\}$ étant substituée pour x dans le polynome proposé, jouira de la propriété de le rendre nul.

Pour démontrer l'existence des quantités r et φ, concevons sur un plan une droite indéfinie AB, *fig.* 2, de position fixe ; si on prend sur cette droite un point A, que par ce

point et dans le même plan on mène une droite quelconque qui fasse avec la première un angle ϕ qui ne rende point nul le coefficient du premier terme du second polynome, il existera nécessairement pour cette valeur de ϕ, une quantité réelle, qui étant substituée pour r dans le second polynome, le rendra nul, puisqu'en supprimant le facteur r qui se trouve dans tous ses termes, on a un polynome de degré impair qui admet toujours une racine réelle : par conséquent, si par le point A on tire une droite qui fasse avec la droite AB un angle quelconque ϕ qui ne rende point nul le coefficient du premier terme, on trouvera toujours sur cette droite, ou sur son prolongement, un point dont la distance au point A étant substituée avec ϕ, jouira de la propriété de rendre nul le second polynome ; ce point sera dans le sens même de la droite, lorsque les coefficiens du premier et du dernier terme du second polynome seront de signes différens, et dans le sens opposé ou sur son prolongement, lorsque ces mêmes coefficiens auront le même signe : mais comme les valeurs négatives de r qui rendent nuls le second polynome, prises positivement, rendent nul celui qui ne diffère de ce dernier que par les signes

des termes affectés des puissances impaires de r, et que ce changement peut être considéré comme provenant de celui de φ en $\varphi + \pi$ dans le second polynome, ou, ce qui revient au même, du changement de direction dans la droite, il en résulte qu'on peut faire abstraction des valeurs négatives de r, en faisant varier l'angle φ depuis zéro jusqu'à une circonférence entière, et ne prendre que les valeurs positives de cette quantité, qui rendent nul le second polynome. Cela posé, il peut arriver que T soit positif ou négatif; supposons-le d'abord positif: si on conçoit une droite mobile appliquée sur la droite AB, l'angle φ qu'elles feront entre elles, étant nul, il en résulte que toutes les longueurs prises sur cette droite, à partir du point A, étant substituées pour r dans le second polynome, le rendront nul, lorsque pour φ on aura substitué zéro. Si on conçoit que la même droite tourne autour du point A, de manière à faire avec elle un angle compris depuis $\varphi = 0$, jusqu'à $\varphi = \frac{\pi}{m}$, $m\varphi$ sera compris entre zéro et π; ainsi le premier et le dernier terme étant positifs, on est dans le doute s'il existe des valeurs positives de r, qui rendent nul le second polynome; si on fait

$\varphi = \frac{\pi}{m}$ le coefficient du premier terme est nul, et une valeur de r est infinie ; si on continue à faire croître l'angle φ depuis $\varphi = \frac{\pi}{m}$ jusqu'à $\varphi = \frac{2\pi}{m}$, $\sin m\varphi$ et $\sin\varphi$ seront de signes contraires. Ainsi la droite, dans chacune de ses positions, aura dans cet angle un point dont la distance au point A jouira de la propriété de rendre nul le second polynome, lorsque pour φ on substituera l'angle que fait la droite mobile avec la ligne AB. Si on la conçoit dans une position qui corresponde à $\varphi = \frac{2\pi}{m}$, le coefficient du premier terme dans le polynome étant nul, la valeur de r est infinie ; de plus, si dans cet angle pour lequel la valeur de r est positive, on conçoit que l'angle φ varie par degrés insensibles la somme des termes positifs, aussi bien que celle des termes négatifs variera par degrés insensibles, de sorte que la somme des uns et des autres, ainsi que la valeur de r variera aussi de la même manière ; par conséquent les valeurs de r étant continues pour toutes les valeurs de φ qui sont comprises entre $\frac{\pi}{m}$ et $\frac{2\pi}{m}$, on peut concevoir une courbe dont les droites

menées du point A à chacun de ses points, déterminent à la fois deux quantités r et φ, qui étant substituées dans le second polynome, jouissent de la propriété de le rendre nul; et comme les suppositions de $\varphi = \frac{\pi}{m}$ et de $\varphi = 2\frac{\pi}{m}$ donnent r infini, il en résulte que cette courbe a deux branches infinies dont les côtés AB′ et AB″ sont les assymptotes, ainsi qu'on pourra aisément le reconnaître. Si on continue à faire tourner la droite mobile autour du point A, on verra que pour toutes les positions de cette droite qui donneraient pour sin φ et sin $m\varphi$ des résultats de même signe, on ne pourra affirmer l'existence d'une quantité, qui étant substituée pour r dans le second polynome, jouisse de la propriété de le rendre nul, et qu'au contraire on pourra affirmer pour toutes les positions de cette droite qui donnent pour sin φ et sin $m\varphi$, des résultats de signes différens, qu'il existe une pareille quantité: or les angles pour lesquels sin φ et sin $m\varphi$ sont de signes contraires lorsque φ est moindre qu'une demi-circonférence, sont ceux pour lesquels $m\varphi$ est compris entre un multiple pair et un multiple impair d'une demi-circonférence, ou, ce qui revient au même, ceux qui sont compris entre $\frac{2k\pi}{m}$ et $\frac{(2k+1)\pi}{m}$, k étant un nombre

entier plus petit que $\frac{1}{2}m$, et π désignant, comme plus haut, la demi-circonférence; par conséquent il y a dans chacun des angles compris entre un multiple impair de $\frac{\pi}{m}$, et le multiple pair, immédiatement supérieur de la même quantité, jusqu'à celui qui est marqué par $\frac{m}{2}-1$, une courbe continue qui a pour assymptotes les côtés de l'angle dans lequel elle se trouve, et dont les droites menées de chacun de ses points au point A, déterminent à la fois la quantité r et l'angle φ, de manière à rendre nul le second polynome.

Lorsque la droite mobile fera avec la droite AB, un angle égal à $(m-1)\frac{\pi}{m}$, le coefficient du premier terme étant nul, sans que ceux de tous les autres termes le soient, une des valeurs de r sera infinie; si on continue à faire croître l'angle φ depuis $(m-1)\frac{\pi}{m}$ jusqu'à π, le coefficient du premier et du dernier terme étant de signes contraires, il y aura toujours une quantité réelle positive et finie, qui dans cet intervalle rendra nul le second polynome, même quand on fera $\varphi=\pi$; car, bien que dans cette

hypothèse le coefficient du premier terme soit nul, comme il conserve un rapport fini avec les autres coefficiens qui sont aussi nuls, il en résulte que la valeur de r sera encore finie. Cette valeur de r n'est point la seule qui satisfasse au second polynome, puisque toutes les distances comptées sur cette droite, à partir du point A, y satisfont également; mais cette valeur de r est celle qui se trouve liée par la loi de continuité avec celles qui correspondent aux valeurs de φ, immédiatement inférieures à π; ainsi la courbe qui détermine à la fois les valeurs de r et de φ qui rendent nuls le second polynome, a pour assymptote la droite $AB^{(m-1)}$, et coupe la droite $AB^{(m)}$. Si on continue à faire tourner la droite mobile, l'angle φ sera plus grand que π, et pourra être représenté par $\pi + \omega$. Or cet angle et ses multiples ont des sinus égaux et de signes contraires à ceux de $\pi - \omega$ et de ses multiples; par conséquent les valeurs de r qui rendent nuls les polynomes qui correspondent à des angles plus grands que deux droits, sont égales à celles qui correspondent aux angles qui sont moindres et qui sont autant au-dessous de cette quantité que les premiers sont au-dessus; de sorte qu'il y a au-dessous de la droite $BAB^{(m)}$, une suite de courbes

égales à celles qui sont au-dessus, et qui sont placées symétriquement de part et d'autre, par rapport à cette même droite; de manière que si on applique la partie du plan qui est au-dessous de la droite sur celle qui est au-dessus, les courbes coïncideront.

Si le dernier terme du second polynome, au lieu d'être positif, était négatif, la discussion se ferait de la même manière que lorsqu'il est positif. On reconnaîtra par cette discussion que les courbes placées au-dessus et au-dessous de la droite AB, sont symétriques, mais que celles qui sont placées au-dessus, au lieu d'être comprises entre les multiples impairs et les multiples pairs de $\frac{\pi}{m}$, seront comprises entre les multiples pairs et les multiples impairs immédiatement inférieurs de la même quantité; on reconnaîtra de plus, que les droites qui font avec la ligne AB des angles égaux à des multiples quelconques de $\frac{\pi}{m}$, sont les assymptotes des branches de courbes qui se trouvent tant au-dessus qu'au-dessous de la droite AB, excepté la droite AB qui jouit exclusivement de la propriété de diviser la courbe comprise dans l'angle B'AC, *fig.* 2, en deux parties parfaitement symétriques.

Considérons maintenant le premier polynome : si on conçoit comme précédemment, une droite indéfinie située sur un plan fixe, *fig.* 3, que par un point A pris sur cette droite, on mène dans ce plan une autre droite qui fasse avec elle un angle φ pour lequel le cosinus de l'arc $m\varphi$ soit négatif, il existera sur cette droite un point dont la distance au point A étant substituée avec l'angle φ dans le dernier polynome, jouira de la propriété de le rendre nul ; et comme en faisant varier l'angle φ par nuances insensibles, les coefficiens des termes positifs et négatifs varient aussi par nuances insensibles, les valeurs de r qui rendent nul le premier polynome, varient de la même manière ; ainsi, puisque les valeurs de r sont continues, on peut concevoir une courbe telle, que si de chacun de ses points on mène une droite au point A, elle détermine à la fois une quantité r et un angle φ qui, étant substitués dans le premier polynome, auront la propriété de le rendre nul ; et comme on ne peut rien statuer sur la réalité de la quantité r dans le premier polynome, que pour les valeurs de φ qui font de $\cos m\varphi$ une quantité négative, ou que pour les valeurs de $m\varphi$ qui sont comprises entre deux multiples im-

pairs d'un quadrans, c'est-à-dire que pour les valeurs de φ qui sont comprises entre

$$(2k+1)\frac{\pi}{2m} \text{ et } (2k+3)\frac{\pi}{2m}.$$

Nous ne nous occuperons que des valeurs de r qui résultent des valeurs de φ comprises entre ces limites; mais les valeurs de φ qui correspondent à deux multiples impairs et successifs de $\frac{\pi}{2m}$, donnant r infini, chaque courbe est comprise entre deux angles qui sont des multiples impairs et successifs de $\frac{\pi}{2m}$, et qui auront pour assymptotes les côtés de ces mêmes angles; et comme au-delà des valeurs de φ qui surpassent π, les cosinus sont les mêmes que pour les valeurs de φ qui sont autant au-dessous de π que les premières sont au-dessus, il en résulte qu'il y a au-dessous de la droite AB autant de courbes qu'il y en a au-dessus et qu'elles sont tellement situées, que la superposition des unes sur les autres, s'opère d'elle-même lorsqu'on fait tourner la partie du plan qui est au-dessous de la ligne AB sur la partie de ce même plan qui est située au-dessus. Cela posé, si on applique la ligne AB de la figure 3 sur la ligne AB de la figure 2, ainsi qu'on le voit *fig.* 4, de ma-

nière que le point A de l'une des figures coïncide avec le point A de l'autre, les droites qui dans la figure 3 font avec la ligne AB des angles multiples de $\frac{\pi}{2m}$, seront de deux espèces; les unes s'appliqueront sur celles de la figure 2, et les autres diviseront en deux également, les angles consécutifs de cette même figure. Or, les courbes de la figure 3 qui sont au-dessus de la ligne AB, sont comprises dans les angles des droites qui font avec cette même ligne des angles de la forme $(4k+1)\frac{\pi}{2m}$ et $(4k+3)\frac{\pi}{2m}$; les courbes de la figure 2 qui sont au-dessus de la même droite, sont comprises entre des droites qui font avec la ligne AB, des angles de la forme

$$(4k+2)\frac{\pi}{2m} \text{ et } (4k+4)\frac{\pi}{2m},$$

par conséquent les courbes de l'une et de l'autre figure ont chacune une branche dans l'angle compris par les droites, qui font avec la ligne AB, des angles de la forme

$$(4k+2)\frac{\pi}{2m} \text{ et } (4k+3)\frac{\pi}{2m},$$

et comme chaque branche qui coupe une de ces

ces droites à une distance finie, va toucher l'autre à l'infini ; il en résulte que l'une de ces branches a un point situé du côté de la concavité de l'autre branche, et un point situé du côté de la convexité, et comme elle est continue dans toute cette étendue, il faut en conclure que les deux courbes se coupent nécessairement, et par conséquent qu'il existe des valeurs de φ comprises entre $(4k+2)\frac{\pi}{2m}$ et $(4k+3)\frac{\pi}{2m}$ et des valeurs de r qui étant substituées dans les deux polynomes en r et en φ, jouissent de la propriété de les rendre nuls.

106. Comme la partie de chacune des figures 2 et 3 qui se trouve au-dessous de la ligne AB peut s'appliquer exactement sur celle qui se trouve au-dessus, il en résulte qu'autant il y aura de points d'intersection au-dessus de la droite AB, *fig.* 4, autant il y en aura au-dessous ; et comme ces dernières intersections sont placées symétriquement aux premières par rapport à la ligne AB, les angles φ qui correspondent à ces intersections, sont les compléments à quatre droits, des angles qui appartiennent aux premières, de sorte que l'existence d'une racine telle que

$$r\{\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}\},$$

entraîne nécessairement celle d'une autre racine, dans laquelle il y aurait au lieu de φ, le complément de cet angle à 4 droits, ou, ce qui revient au même, $-\varphi$ au lieu de φ. Or le cosinus de $-\varphi$ étant le même que celui de l'angle φ, et son sinus étant égal et de signe contraire à celui de ce même angle, il en résulte que

$$r\{\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}\}$$

sera aussi une racine; d'où il suit que l'existence d'une racine imaginaire dans un polynome, entraîne toujours celle d'une autre racine qui ne diffère de la première que par le signe de la partie imaginaire.

C'est ce qu'on peut voir immédiatement, et sans avoir recours à aucune construction; car si dans un polynome on substitue pour la variable, une quantité de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et que l'on en développe les puissances successives, on aura un résultat qui se composera de deux sortes de termes : les uns seront affectés de puissances paires de $\beta\sqrt{-1}$, et les autres de puissances impaires de la même quantité, et comme les puissances paires de $\beta\sqrt{-1}$ sont réelles et que les puissances impaires sont imaginaires, il s'ensuit que le résultat est de la forme $P+Q\sqrt{-1}$. Or si dans le même polynome on substitue

$\alpha - \beta\sqrt{-1}$, on obtiendra un résultat qui ne différera du premier que par le signe de la partie imaginaire, et qui par conséquent sera $P - Q\sqrt{-1}$. Mais si la substitution réduit le polynome à zéro, il faut que les termes réels et imaginaires se réduisent séparément à zéro, puisque si cela n'avait point lieu, on pourrait en déduire qu'une quantité réelle est égale à une quantité imaginaire, ainsi $P = 0$ et $Q = 0$, par conséquent $P - Q\sqrt{-1} = 0$. Si donc un polynome dont les coefficiens sont réels, admet une racine de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, il en admettra nécessairement une seconde qui ne différera de la première que par le signe de la partie imaginaire : c'est cette propriété que ces racines ont d'être inséparables et de ne jamais aller l'une sans l'autre, qui leur a fait donner le nom de *racines conjuguées*.

107. Le raisonnement qu'on vient d'employer peut servir à démontrer que si un polynome admet une racine de la forme $a + \sqrt{b}$, a et b étant commensurables, il en admet nécessairement une autre $a - \sqrt{b}$, qui ne diffère de la première que par le signe du radical; car le résultat de la première substitution étant représenté par $A + B\sqrt{b}$, celui de la seconde le sera par

$A - B\sqrt{b}$, et comme $A + B\sqrt{b} = 0$, et que d'ailleurs les quantités A et B sont commensurables, il faut qu'on ait à-la-fois $A = 0$ et $B = 0$, sans quoi on pourrait en conclure qu'une quantité commensurable est égale à une quantité incommensurable, ce qui est absurde; par conséquent il faut qu'on ait $A - B\sqrt{b} = 0$, et que par suite $a - \sqrt{b}$ soit racine du polynome.

108. Si on considère le nombre des intersections qui se trouvent au-dessus de la droite AB, *fig.* 4, on verra facilement qu'ils sont au nombre de $\frac{m}{2}$, puisque ce nombre est celui des angles dans lesquels se trouvent des branches de courbes, et comme à chacune d'elles correspond une racine du polynome, il en résulte que les racines qui correspondent aux intersections qui se trouvent tant au-dessus qu'au-dessous de cette même droite, sont au nombre de m, ce qui démontre que tout polynome qui n'admet aucune racine réelle et qui n'a aucun facteur multiple, a autant de racines imaginaires qu'il est marqué par son degré; c'est ce qu'on pourrait conclure de l'existence d'une racine seulement, car une racine imaginaire étant toujours accompagnée par sa conjuguée, si l'une d'elles est repré-

sentée par

$$r\{\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1}\};$$

une autre le sera par

$$r\{\cos\varphi-\sin\varphi.\sqrt{-1}\};$$

si on fait le produit des facteurs du premier degré qui correspondent à ces racines, on aura un facteur réel du second degré, qui sera

$$x^2-2rx\cos\varphi+r^2.$$

Si on divise le polynome par ce facteur, on en obtiendra un d'un degré moindre de deux unités, et comme celui-ci admettra un facteur réel du deuxième degré, le premier polynome sera le produit de deux facteurs du second degré par un facteur d'un degré moindre de quatre unités: en continuant ainsi de proche en proche, on verra qu'un polynome peut être décomposé en autant de facteurs réels du second degré, qu'il est marqué par la moitié de son degré, et par suite, qu'il a autant de racines qu'il est marqué par l'exposant de son degré. La décomposition d'un polynome de degré pair en facteurs réels du second degré n'est point particulière à un polynome dégagé de facteurs multiples; car si un polynome a des facteurs égaux,

on peut le considérer comme résultant du produit de plusieurs polynomes dans chacun desquels aucune racine ne peut se trouver plusieurs fois, et comme une racine imaginaire ne peut se trouver dans chacun d'eux sans être accompagnée d'une racine qui ne diffère de celle-ci que par le signe de la partie imaginaire, il en résulte qu'autant de fois une racine imaginaire se trouvera dans un polynome, autant de fois la conjuguée de celle-ci s'y trouvera aussi : si donc on multiplie deux à deux les facteurs du premier degré qui correspondent aux racines imaginaires qui ne diffèrent que par le signe de la partie imaginaire, on aura autant de facteurs réels du second degré qu'il est marqué par la moitié du nombre des facteurs du premier ; et comme un polynome de degré pair qui admet des racines réelles, en admet toujours un nombre pair, et que les facteurs du premier degré qui correspondent à ces racines, étant multipliés deux à deux, donnent des facteurs réels de second degré, il en résulte que tout polynome de degré pair peut être décomposé en autant de facteurs réels du second degré, qu'il est marqué par la moitié du degré du polynome.

109. On voit par ce qui vient d'être dit, que s'il n'est pas toujours possible de former avec des facteurs réels du premier degré, un polynome dont les coefficiens aient telle valeur qu'on veut, il est du moins toujours possible d'en former un dont les coefficiens aient telle valeur qu'on voudra avec un facteur réel du premier degré, et un certain nombre de facteurs du second, si le polynome doit être d'un degré impair, et avec un certain nombre de facteurs réels du second degré, si le polynome doit être d'un degré pair.

110. Maintenant que nous savons qu'un polynome rationnel a autant de racines qu'il est marqué par l'exposant de son degré, et que nous connaissons la nature de ses racines, il nous reste à procéder à leur détermination rigoureuse, si cela est possible, ou du moins approchée, si on ne peut faire autrement.

111. La méthode qui se présente naturellement consiste à placer chaque racine entre deux nombres, à l'aide desquels on puisse déterminer d'autres nombres, qui, sans cesser de la comprendre, puissent différer entre eux d'une quantité aussi petite qu'on le voudra; pour placer

ainsi chaque racine, on substitue dans le polynome, depuis la limite inférieure jusqu'à la limite supérieure des racines positives, une suite de nombres en progression par différence, dont l'intervalle des termes soit assez petit pour que plusieurs racines ne puissent se trouver entre deux termes consécutifs; ceux qui par leur substitution donnent des résultats de signes contraires, comprennent une racine, et n'en comprennent qu'une seule, puisque si le contraire avait lieu, les deux nombres substitués ne seraient point deux termes successifs de la progression, ce qui est contre l'hypothèse. Lorsque chaque racine se trouve ainsi placée entre deux nombres, on prend une moyenne arithmétique entre eux, on la substitue dans le polynome, et le résultat qui est de signe contraire à l'une ou l'autre des deux substitutions précédentes, donnera deux limites plus rapprochées que l'on fera servir, comme les précédentes, à en avoir deux autres plus resserrées, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on juge avoir une approximation suffisante : on pourra même apprécier à chaque opération l'erreur qu'on commet, car si on prend pour la racine approchée l'une des deux dernières limites employées, l'erreur sera toujours moindre que

la différence qui existe entre ces deux limites.

112. Cette méthode est exacte, mais elle a l'inconvénient de ne pas conduire à une approximation très-rapide. M. Lagrange en a proposé une autre qui réunit à l'avantage de pouvoir donner à chaque opération un résultat plus approchant du véritable, celui de conduire à l'expression exacte des racines qui correspondent aux facteurs rationnels du premier et du second degré que le polynome proposé peut contenir; mais sa méthode, aussi bien que celle que nous venons d'exposer, exige que l'intervalle des termes successifs de la progression soit assez petit pour que deux de ses termes ne puissent comprendre plusieurs racines, puisque si le contraire avait lieu, on pourrait ne pas s'apercevoir dans le passage d'un résultat à l'autre, de l'existence d'une racine. Or deux quantités ne peuvent comprendre entre elles plusieurs racines, à moins que la différence entre celles-ci ne soit moindre que celle qui règne entre les deux premières quantités; par conséquent si la différence de ces dernières est moindre que la plus petite différence qui existe entre les racines, on sera sûr de ne jamais passer par-

dessus aucune racine sans s'en apercevoir : mais comme la détermination de cette quantité et un plus grand détail sur la résolution des équations nous ferait sortir du plan que nous nous sommes proposé, nous renverrons pour l'un et l'autre, ainsi que pour tout ce qui a rapport à la théorie des fractions continues, au Traité de la Résolution des Équations numériques de M. Lagrange, et à la seconde édition de la Théorie des Nombres de M. Legendre.

Résolution générale des Équations du troisième degré.

113. Parmi les différentes méthodes qui sont connues pour résoudre les équations du troisième degré, la plus simple est celle qui consiste à former une équation complète du troisième degré avec une équation du premier, et à l'identifier avec l'équation générale de ce degré.

114. Pour pouvoir former avec une équation du premier degré une équation du troisième, que l'on puisse comparer avec l'équation générale de ce degré, il faut qu'il y ait dans la première autant d'indéterminées qu'il y a d'équations à

établir, et comme l'équation générale du troisième degré peut être ramenée à ne contenir que trois coefficiens, il faut que l'équation du premier contienne un pareil nombre d'indéterminées.

115. Soit donc posée l'équation

$$x = a + b + c.$$

Si on fait passer c du second membre dans le premier, et qu'on élève ensuite les deux membres au cube, on aura

$$(x - c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\{a + b\},$$

et comme $a + b = x - c$, on aura

$$(x - c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(x - c).$$

Si on fait passer tous les termes du second membre dans le premier, on aura une équation complète du troisième degré, qui étant comparée avec l'équation générale de ce degré, servira à trouver quelles sont les fonctions des coefficiens qu'il faut prendre pour a, b, c, afin de satisfaire à l'équation dont il s'agit. Mais l'expression générale des racines d'une équation du troisième degré devant nécessairement

se simplifier lorsque l'on y suppose que l'un des coefficiens est nul, puisque les termes dans lesquels il se trouve, disparaissent, nous supposerons que l'équation dont il s'agit ait un terme de moins, et comme la transformation la plus simple est celle qui consiste à faire disparaître le second terme, nous nous arrêterons à l'équation $x^3 + px + q = 0$: d'ailleurs il est facile de voir, sans qu'il soit même nécessaire d'effectuer les calculs, que cette hypothèse est la plus simple; car si on voulait faire disparaître le coefficient de l'avant-dernier terme, il faudrait résoudre une équation du second degré, et la transformée aurait des coefficiens qui seraient irrationnels, et que l'on serait obligé d'introduire dans l'expression des racines de l'équation privée de l'avant-dernier terme : l'irrationnalité provenant de cette cause, disparaîtrait à la vérité de l'expression des racines de l'équation complète, à cause des réductions qui s'opéreraient, puisque le résultat final doit toujours se réduire à celui qu'on aurait obtenu si on avait résolu l'équation complète immédiatement, sans faire disparaître aucun terme; mais par ce procédé on n'arriverait au résultat final, qu'après de longs calculs, tandis qu'en faisant disparaître le second terme, la trans-

formée se trouve avoir des coefficiens rationnels, qui, étant substitués dans l'expression générale des racines de l'équation du troisième degré privée de second terme, donne l'expression générale des racines de l'équation complète, sans aucun autre calcul que celui qui résulte de quelques réductions qui s'offrent d'elles-mêmes, et ajoutant au résultat le tiers du coefficient du second terme pris avec un signe contraire.

116. Si dans l'équation

$$(x-c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(x-c),$$

on fait $c = 0$, on aura une équation qui sera

$$x^3 = a^3 + b^3 + 3abx,$$

et dont $a + b$ sera une racine. Si on fait passer tous les termes dans un seul membre, on aura une équation qui sera $x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$, et que l'on pourra identifier avec l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

ce qui fournira les deux équations

$$3ab = -p$$
$$a^3 + b^3 = -q,$$

la seconde de ces deux équations donne la

ticulier. La première chose qui se présente, est celle qui tient à la multiplicité des valeurs des radicaux. D'abord nous observerons que cette multiplicité des valeurs de la formule générale ne peut provenir de celle des valeurs des radicaux carrés, parce qu'étant pris avec des signes contraires, les deux quantités qui sont soumises aux radicaux cubiques se changent l'une dans l'autre. Quant à la multiplicité des valeurs qui proviennent des radicaux cubiques, nous observerons que chacun de ces radicaux ayant trois valeurs, chaque valeur du premier radical peut être prise avec chacune des valeurs du second, ce qui fait neuf valeurs pour x, tandis qu'on ne doit en trouver que trois. Mais de ces neuf valeurs, trois seulement se rapportent à l'équation $x^3 + px + q = 0$, et les six autres lui sont étrangères. Examinons à quoi tient cette multiplicité de valeurs, quelles sont celles qui sont étrangères à notre objet, et quelles sont les circonstances qui les ont introduites. Pour cela nous observerons que l'équation que l'on obtient en élevant au cube l'égalité $ab = -\frac{p}{3}$ peut être aussi considérée comme provenant de l'élévation au cube des deux autres équations

tions

$$ab = -\frac{\alpha p}{3} \text{ et } ab = -\frac{\alpha^2 p}{3},$$

α étant une des racines cubiques imaginaires de l'unité; ainsi les valeurs de $a+b$ qui résultent de la combinaison des deux équations

$$a^3 + b^3 = -q$$

$$a^3 b^3 = -\frac{p^3}{27},$$

ne devant point se rapporter plutôt à l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

qu'à chacune des deux suivantes,

$$x^3 + \alpha px + q = 0$$

$$x^3 + \alpha^2 px + q = 0,$$

il faut qu'elles se rapportent à toutes, puisque les équations à établir pour avoir les racines de l'une, sont les mêmes que celles qu'il faudrait établir pour avoir celles qui se rapportent à chacune des deux autres; par conséquent les neuf valeurs obtenues sont les racines de l'équation du neuvième degré, qu'on obtiendrait en multipliant entre elles les trois dernières équations. On peut l'obtenir plus simplement,

en faisant passer l'avant-dernier terme de l'une d'elles, du premier membre dans le second, et élevant chaque membre de cette dernière équation à la troisième puissance ; car les racines de chacune des trois dernières équations satisfaisant respectivement à celles qu'on obtient en faisant passer l'avant-dernier terme du premier membre dans le second, satisferont encore à celles qu'on obtiendra en élevant ces dernières équations au cube, et comme le cube de l'une quelconque des trois donne

$$(x^3 + q)^3 = -p^3x^3,$$

à cause que $\alpha^3 = 1$, il en résulte que les racines des trois équations

$$x^3+px+q=0, \quad x^3+\alpha px+q=0, \quad x^3+\alpha^2px+q=0,$$

satisfont à l'équation précédente, et qu'ainsi elle est identique avec celle qui résulterait de la multiplication de ces trois dernières.

119. Pour avoir les trois racines qui se rapportent à l'équation $x^3 + px + q = 0$, il faut ajouter ensemble les valeurs de a et de b, dont le produit est réel, puisqu'elles doivent satisfaire

à l'équation $ab = -\frac{p}{3}$. Si l'on représente une des valeurs du premier radical par m, les deux autres valeurs seront αm et $\alpha^2 m$. Si l'on représente une valeur du second radical par n, les deux autres seront αn et $\alpha^2 n$, et comme on peut supposer d'ailleurs que les quantités m et n représentent des valeurs de a et de b dont le produit soit réel, les trois racines de l'équation proposée seront représentées par

$$m + n$$
$$\alpha m + \alpha^2 n$$
$$\alpha^2 m + \alpha n,$$

si l'on substitue pour α et α^2 leurs valeurs

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

les trois racines seront représentées par

$$m + n$$
$$-\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}$$
$$-\frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$

et comme de ces trois racines, une au moins

est réelle, nous supposerons que les quantités m et n se rapportent à celle-ci, ce qu'on peut toujours supposer, de sorte que $m+n$ sera toujours réel.

120. Reprenons maintenant la formule générale des racines des équations du troisième degré, et examinons ce qu'elle offre de particulier, lorsqu'on donne aux coefficiens certaines valeurs; cette formule est donnée par l'équation

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Si dans cette formule on suppose que $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ soit positif, le premier radical et le second ont chacun une valeur réelle, ainsi leur somme qui est $m+n$ est réelle, et leur différence qui est $m-n$ est aussi réelle. Ainsi la première racine est réelle, et les deux autres qui sont comprises dans la formule

$$-\frac{m+n}{2}\pm\frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$

sont imaginaires; par conséquent, lorsque la

quantité qui est sous le radical carré est positive, une seule racine est réelle, et les deux autres sont imaginaires.

Si $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, la quantité que nous avons désignée par m est égale à celle que nous avons désignée par n, $m-n=0$, ainsi dans ce cas les trois racines sont réelles : l'une d'elles est égale à $2m$ et les deux autres sont égales et de signes contraires à la moitié de la première, c'est-à-dire à $-m$.

Si $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est négatif, ce qui ne peut avoir lieu, à moins que p ne soit négatif, puisque $\frac{q^2}{4}$ est essentiellement positif, les valeurs de m et n sont imaginaires, mais leur somme est réelle, puisque toute équation de degré impair a au moins une racine réelle, et que les quantités m et n par hypothèse, sont prises parmi les valeurs de a et de b, qui se rapportent à une racine réelle de l'équation $x^3+px+q=0$; quant aux deux autres racines, il faut, avant de rien prononcer, chercher la valeur de $m-n$: or on a

$$m-n=\frac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2}=\frac{m^3-n^3}{(m+n)^2-mn};$$

et comme

$$m^3 - n^3 = 2\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)},$$

et que d'ailleurs $mn = -\frac{p}{3}$, on trouvera, en représentant $m + n$ par r que

$$m - n = 2\frac{\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}{r^2 + \frac{p}{3}},$$

ainsi les deux autres racines qui sont représentées par la formule

$$-\frac{m+n}{2} \pm \frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$

seront données par la suivante

$$-\frac{r}{2} \pm \frac{\sqrt{-3\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}{r^2 + \frac{p}{3}},$$

et par conséquent exprimées en fonction de la première racine et des coefficiens de l'équation. Sous cette forme, on voit que dans le cas que nous considérons, c'est-à-dire dans celui où $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est négatif, les trois racines sont réelles,

et que si au contraire $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est positif, une seule racine est réelle, et les deux autres sont imaginaires, ce qu'on savait déjà.

121. Le cas que nous venons de considérer a cela de particulier, que, bien que chacune des parties dont l'expression générale des racines se compose soit imaginaire, néanmoins leur somme est une quantité réelle, et ce qu'il y a de plus singulier, c'est que ce cas soit précisément celui où les trois racines sont réelles et inégales; c'est aussi à quoi on devait s'attendre d'après la discussion des deux premiers cas: car en vertu de cette discussion, lorsque la quantité qui est soumise au radical carré est positive, une seule racine est réelle, et les deux autres sont imaginaires, et lorsque cette quantité est nulle, les trois racines sont réelles, mais non pas inégales; ainsi il fallait donc que le cas où l'équation comporte trois racines inégales, répondît à celui où la quantité qui est sous le radical carré est une quantité négative. Quant au cas où les trois racines seraient égales, il ne doit pas être considéré ici, parce qu'une équation dont toutes les racines sont égales, ne peut manquer de second terme, à moins que tous

les suivans ne soient nuls, ce qui réduirait l'équation à son premier terme. Il restait donc à démontrer la réciproque, c'est-à-dire, qu'une équation du troisième degré ne peut admettre de racines imaginaires lorsque chacune des parties dont se compose l'expression générale des racines, se présente sous une forme imaginaire; c'est, je crois, ce que nous avons fait de la manière la plus simple. Cependant on pourrait encore desirer de voir de plus près comment il se fait que la somme des deux parties dont se compose l'expression des racines, se réduit à une quantité réelle, et surtout comment il peut se faire que chacune des deux parties dont se compose l'expression générale soient des quantités imaginaires de l'espèce de celles qui sont fournies par des équations du second degré.

122. On peut dans quelques cas particuliers, parvenir à dégager l'expression des racines de la forme imaginaire sous laquelle elles paraissent se présenter; cela a lieu toutes les fois qu'on peut extraire exactement la racine cubique de la quantité qui est soumise au premier radical cube, car cette racine cubique étant composée d'une partie réelle et d'une

partie imaginaire, de la forme de celles qui sont données par des équations du second degré, il faut que la racine cubique de la seconde quantité ne diffère de celle de la première que par le signe de la partie imaginaire, ce qui fait que la somme est réelle.

125. Ce qu'on peut faire facilement dans quelques cas particuliers, les géomètres ont cherché à le faire généralement, c'est-à-dire, qu'ils ont cherché à mettre l'expression générale des racines, dans le cas que nous considérons, sous une forme algébrique qui soit composée d'un nombre fini de termes, et qui soit entièrement dégagée de toute espèce d'imaginaires. Malgré leurs efforts ils n'ont pu y parvenir, c'est ce qui a fait donner à ce cas le nom de cas irréductible ; ainsi on désigne sous le nom de cas irréductible dans les équations du troisième degré, celui qui a lieu lorsque chacune des deux parties dont l'expression générale des racines se compose, est une quantité imaginaire, ou, ce qui revient au même, lorsque le coefficient de l'avant-dernier terme est négatif, et que le cube du tiers de ce coefficient, pris abstraction faite du signe, surpasse le carré de la moitié du coefficient du dernier terme.

124. Quoique l'on ne puisse réussir à extraire exactement dans tous les cas la racine cubique d'une quantité en partie réelle et en partie imaginaire de la forme $a + b\sqrt{-1}$, cela n'empêche point que cette racine ne soit de la même espèce que cette quantité, c'est-à-dire de la forme $m + n\sqrt{-1}$, m et n étant réels, c'est ce qu'on peut démontrer fort simplement, en faisant voir qu'il est toujours possible de déterminer pour m et n des quantités réelles propres à satisfaire à l'équation

$$a + b\sqrt{-1} = m^3 - 3mn^2 + \{3m^2n - n^3\}\sqrt{-1},$$

car le second membre étant le cube de

$$m + n\sqrt{-1},$$

on aura

$$(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = m + n\sqrt{-1},$$

et comme elle ne peut être satisfaite à moins que la partie réelle du premier membre ne soit égale à la partie réelle du second, et que la partie imaginaire ne soit égale de part et d'autre, il faut qu'on ait séparément les deux équations

$$m^3 - 3mn^2 = a$$
$$n^3 - 3m^2n = -b,$$

et qu'on y satisfasse en quantités réelles. Réciproquement, s'il est possible d'y satisfaire en quantités réelles, il sera démontré que la racine cubique de $a + b\sqrt{-1}$ est de la forme $m + n\sqrt{-1}$: de la première équation on tire

$$n^2 = \frac{m^3 - a}{3m};$$

si on porte cette valeur de n^2 dans le carré de la seconde équation qui est

$$n^2 \{ n^2 - 3m^2 \}^2 = b^2,$$

on aura, après avoir fait disparaître les dénominateurs,

$$(m^3 - a)\ (8m^3 - a)^2 - 27b^2m^3 = 0,$$

mais cette équation étant de degré impair, donnera pour m au moins une valeur réelle, et comme on tire de cette même équation

$$\frac{m^3 - a}{3m} = \frac{9b^2m^2}{(8m^3 - a)^2},$$

il en résulte, à cause que le second membre est positif, que n^2 qui est égal à $\frac{m^3 - a}{3m}$, est aussi positif, et par suite, que la valeur de n qui cor-

respond à la valeur réelle de m, est aussi réelle; de sorte que la racine cubique d'une quantité de la forme $a + b\sqrt{-1}$ est de la forme $m + n\sqrt{-1}$. Quant au signe de n, il sera positif si la quantité b est de même signe que $3m^2 - n^2$, et il sera négatif, au contraire, si ces deux dernières quantités sont de signes différens; c'est ce qui résulte de l'équation

$$3m^2n - n^3 = b,$$

ou, ce qui revient au même, de l'équation

$$n = \frac{b}{3m^2 - n^2}.$$

125. Si après avoir extrait la racine cubique de $a + b\sqrt{-1}$, on avait à extraire celle de $a - b\sqrt{-1}$, il est clair que le résultat serait le même, au signe près, de la partie imaginaire, car le cube de $m + n\sqrt{-1}$ étant $a + b\sqrt{-1}$, celui de $m - n\sqrt{-1}$ sera $a - b\sqrt{-1}$; ainsi si les quantités m et n sont déterminées en grandeur et en signe, de manière à avoir

$$\{a + b\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}} = m + n\sqrt{-1},$$

on aura

$$\{a - b\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}} = m - n\sqrt{-1};$$

ainsi toute expression de la forme

$$\{a+b\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}}+\{a-b\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}},$$

aura une des valeurs qui sera égale à

$$m+n\sqrt{-1}+m-n\sqrt{-1};$$

et qui par conséquent se réduira à une quantité réelle égale à $2m$.

126. De ce qui vient d'être dit, il résulte une manière fort simple de faire voir que dans le cas irréductible les trois racines sont réelles; car si $\{a+b\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}}$ et $\{a-b\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}}$ désignent respectivement les deux parties qui composent l'expression générale des racines de l'équation du troisième degré, et que l'on représente une des valeurs de $\{a+b\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}}$ par $m+n\sqrt{-1}$, une des valeurs de... $\{a-b\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}}$ sera représentée par ..... $m-n\sqrt{-1}$, si on désigne $m+n\sqrt{-1}$ par p et $m-n\sqrt{-1}$ par q, une des racines de l'équation du troisième degré sera représentée par

$$p+q=2m;$$

et comme les deux autres seront données par

la formule

$$-\frac{p+q}{2} \pm \frac{p-q}{2}\sqrt{-1},$$

il en résulte, à cause que $p+q=2m$ et que $p-q=2n\sqrt{-1}$, que les deux dernières racines seront représentées par $-m \pm n$, et que par conséquent les trois racines seront réelles.

127. La première démonstration que nous avons donnée, suppose la connaissance des quantités que nous avons désignées par a et b, ou des équations à l'aide desquelles on les détermine; il ne sera peut-être pas inutile de montrer de quelle manière on peut y parvenir sans y avoir recours, et comment on peut faire servir ce résultat à trouver l'expression des racines de l'équation du troisième degré, que nous supposerons pour plus de simplicité, privée de second terme. Si on désigne par r la racine réelle de l'équation $x^3+px+q=0$, et qu'on la divise par $x-r$, on aura pour quotient

$$x^2+rx+r^2+p,$$

qui a pour racines

$$-\frac{r}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\left\{r^2+\frac{4}{3}p\right\}}:$$

si l'on représente $r^2 + \frac{4}{3}p$ par y, on aura

$$r^2 = y - \frac{4}{3}p,$$

mais de l'équation

$$r^3 + pr + q = 0,$$

on en déduit

$$r^2\{r^2 + p\}^2 = q^2;$$

si dans cette dernière équation on substitue au lieu de r^2 sa valeur $y - \frac{4}{3}p$, on aura une nouvelle équation que l'on pourra mettre sous la forme

$$y\{y^2 - 2py + p^2\} - \frac{4}{27}p^3 = q^2,$$

de laquelle on tirera

$$y = \frac{q^2 + \frac{4}{27}p^3}{\{y-p\}^2};$$

si l'on remplace la quantité $r^2 + \frac{4}{3}p$ qui est sous le radical, par

$$\frac{q^2 + \frac{4}{27}p^3}{(y-p)^2},$$

ou, ce qui revient au même, par

$$\frac{q^2+\frac{4}{27}p^3}{\left(r^2+\frac{p}{3}\right)^2}.$$

les deux dernières racines seront représentées, comme plus haut, par

$$-\frac{r}{2}\pm\frac{\sqrt{-3\left\{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right\}}}{r^2+\frac{p}{3}}$$

par conséquent, si $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est positif, une seule racine de l'équation proposée est réelle, et les deux autres sont imaginaires; si au contraire $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est négatif, les trois racines sont réelles.

Si $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ était nul, on aurait

$$y\{y-p\}^2=0,$$

puisque

$$y\{y-p\}^2=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27},$$

or l'équation

$$y\{y-p\}^2=0,$$

ne

ne peut être satisfaite, à moins qu'on ait $y = 0$, ou $y - p = 0$; mais lorsque $y = 0$, la quantité qui est soumise au radical étant nulle, et la quantité qui le divise ne l'étant pas, les trois racines sont réelles, et les deux dernières sont égales et de signes contraires à la moitié de l'autre. Si $y - p = 0$, la quantité qui divise le radical étant nulle en même temps que ce radical, les deux dernières racines se présentent sous la forme $-\frac{r}{2} \pm \frac{0}{0}$, ce qui n'apprend rien. Mais si on remonte à la formule

$$x = -\frac{r}{2} \pm \frac{\sqrt{-\frac{3}{4}\left\{r^2 + \frac{4}{3}p\right\}}}{r^2 + \frac{p}{3}}$$

qui donne immédiatement ces deux dernières racines, et qu'on remplace p par sa valeur tirée de l'équation $y - p = 0$, ou $r^2 + \frac{p}{3} = 0$, on aura, à cause que $r^2 + \frac{4}{3}p = -3r^2$,

$$x = -\frac{r}{2} \pm \frac{3}{2}r.$$

Ainsi les trois racines sont r, r et $-2r$, par conséquent toutes les fois que $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ sera égal à zéro, les trois racines seront réelles, et par-

mi ces racines, deux seront égales entre elles et de signes contraires à la moitié de la troisième.

128. Si on désigne la première des deux dernières racines par a et la seconde par b, on aura

$$a = -\frac{r}{2} + \frac{\sqrt{-3\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}}{r^2+\frac{1}{3}p}$$

$$b = -\frac{r}{2} - \frac{\sqrt{-3\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}}{r^2+\frac{1}{3}p};$$

si on retranche la seconde équation de la première, on aura

$$a-b = \frac{2\sqrt{-3\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}}{r^2+\frac{1}{3}p};$$

mais de l'équation $r+a+b=0$, on en déduit $r=-a-b$, et comme des deux équations, $a^3+pa+q=0$, $b^3+pb+q=0$, retranchées l'une de l'autre, on en obtient une qui, étant divisée par $a-b$, donne

$$-p = a^2+ab+b^2,$$

il en résulte, qu'en substituant pour r et p leur

valeur, on aura

$$a - b = \frac{2.3\sqrt{-3\left\{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right\}}}{2a^2+5ab+2b^2},$$

faisant disparaître les dénominateurs, et divisant par 2, on aura,

$$a^3-b^3+\tfrac{1}{2}(a^2b-ab^2)=3\sqrt{-3\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}.$$

Or si l'on fait le cube de $a\alpha - a^2b$; (α étant une des racines cubiques imaginaires de l'unité), on trouve qu'il est égal à

$$a^3-b^3+3\alpha a^2b+3\alpha^2 ab^2,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$a^3-b^3+\frac{3}{2}(a^2b-ab^2)-\frac{3\sqrt{-3}}{2}(a^2b+ab^2);$$

ainsi il ne manque au premier membre de l'équation trouvée ci-dessus, que

$$-\frac{3\sqrt{-3}}{2}(a^2b+ab^2)$$

pour en faire un cube parfait, et comme

$$a^2b+ab^2=ab(a+b)=-abr=q,$$

il en résulte que si au second membre on ajoute le produit de q par $-\frac{3\sqrt{-3}}{2}$, on aura

$$(a\alpha - \alpha^2 b)^3 = 3\sqrt{-3}\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right),$$

d'ou l'on tire

$$a\alpha - \alpha^2 b = \sqrt{-3}\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)} = m\sqrt{-3}.$$

Si on change a en b et b en a dans l'équation

$$a^3 - b^3 + \tfrac{3}{2}(a^2 b - ab^2) = 3\sqrt{-3}.\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

on a, après avoir changé les signes

$$a^3 - b^3 + \tfrac{3}{2}(a^2 b - ab^2) = -3\sqrt{-3}.\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

ajoutant cette équation à la suivante

$$-3\sqrt{-3}(a^2 b + ab^2) = -3\sqrt{-3}\,.\,q,$$

et extrayant la racine cubique du résultat, on aura

$$b\alpha - a^2 a = \sqrt{-3}\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)} = n\sqrt{-3}.$$

Si on combine cette équation avec celle qui

nous a donné la valeur de $a\alpha - \alpha^2 b$, on trouvera

$$a = \alpha m + \alpha^2 n$$
$$b = \alpha^2 m + \alpha n ;$$

si on ajoute ces deux dernières équations, on aura à cause que $\alpha^2 + \alpha = -1$,

$$a + b = -m - n,$$

et comme $r = -a - b$, on aura

$$r = m + n =$$
$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

ce qui est la formule connue.

129. On peut encore démontrer d'une autre manière que nous ne l'avons fait, que dans le cas irréductible du troisième degré, les trois racines sont réelles; en effet, si dans l'équation $x^3 - px + q = 0$, on substitue $r\sqrt{\frac{p}{3}}$ au lieu de x, on en aura une autre, qui, étant divisée par $\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ sera

$$r^3 - 3r + \sqrt{\frac{27q^2}{p^3}} = 0 ;$$

mais puisqu'on a $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, il faudra qu'on ait $\sqrt{\frac{27q^2}{p^3}} < 2$; si donc on représente $\sqrt{\frac{27q^2}{p^3}}$ par 2ω, ω sera plus petit que l'unité, et la quantité r sera donnée par l'équation

$$r^3 - 3r + 2\omega = 0;$$

si pour r on y substitue successivement les nombres -2, -1, 0, 1, 2, les signes des résultats qui correspondent à ces substitutions seront, lorsque ω sera positif, $-$, $+$, $+$, $-$, $+$, et lorsque ω sera négatif, $-$, $+$, $-$, $-$, $+$; par conséquent, dans le cas où ω est négatif comme dans celui où il est positif, il y a trois valeurs de r qui satisfont à l'équation

$$r^3 - 3r + \frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}} = 0,$$

et par suite trois valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$x^3 - px + q = 0.$$

130. Le théorème que nous venons de démontrer n'est qu'un cas particulier d'un autre

théorème plus général, et qui consiste en ce que toute équation de degré impair de la forme

$$x^m + px + q = 0,$$

a toujours trois racines réelles, et $m-3$ imaginaires, lorsque $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{p}{m}\right)^m$ est égal ou plus petit que zéro, et qu'elle ne peut avoir qu'une seule racine réelle lorsque $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{p}{m}\right)^m$ est plus grand que zéro.

131. Nous observerons d'abord que l'équation dont il s'agit ne peut avoir plusieurs racines réelles, à moins que p ne soit négatif, puisque si le contraire avait lieu, il y aurait au moins une quantité réelle positive ou négative qui satisferait à l'équation $mx^{m-1} + p = 0$, qui est la dérivée de la proposée, ce qui n'a pas lieu. Lorsque p est négatif, l'équation $x^m + px + q = 0$ ne peut admettre plus de trois racines réelles, puisque si cela avait lieu, la dérivée en admettrait plus de deux, ce qui est impossible.

132. Si dans l'équation $x^m - px + q = 0$, on fait $x = r\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}}$ on aura une équation, qui,

étant divisée par le coefficient de la plus haute puissance de r, sera

$$r^m - mr + \frac{q}{\frac{p}{m}\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}}} = 0,$$

et comme dans le cas où

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} - \left(\frac{p}{m}\right)^m \text{est} < 0,$$

on a

$$\frac{q}{\frac{p}{m}\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}}} < m - 1.$$

on pourra représenter le dernier terme par $(m-1)\omega$, ω étant plus petit que l'unité : la réalité des trois racines de l'équation proposée dépendra donc de l'existence de trois racines réelles dans l'équation $r^m - mr + (m-1)\omega = 0$. Si dans cette équation on substitue pour r, 0 et 1, les signes des résultats, lorsque ω est positif, sont de signes contraires. Ainsi l'équation a une racine réelle positive. Si on la divise par le facteur qui correspond à cette racine, on aura une équation de degré pair, dont le dernier terme sera négatif, et qui par conséquent aura deux racines réelles, l'une positive et l'autre

négatives; ainsi l'équation précédente a trois racines réelles, dont deux seulement sont positives et l'autre négative. Si ω est négatif, la substitution de o et de -1 donnant des résultats de signes contraires, l'équation a une racine réelle négative comprise entre ces deux nombres; si on divise l'équation proposée par le facteur qui correspond à cette racine négative, on aura une équation de degré pair, dont le dernier terme sera négatif, et qui par conséquent aura deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative; donc la proposée aura dans le cas de ω négatif, comme dans celui de ω positif, trois racines réelles.

133. Il reste maintenant à considérer le cas où on aurait $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}+\left(\frac{p}{m}\right)^{m}>0$, ce qui revient à supposer ω plus grand que l'unité dans l'équation $r^m-mr+(m-1)\omega=0$. Si dans cette équation on substitue $1+\delta$ au lieu de r, le résultat sera positif tant que δ et ω seront positifs: ainsi cette équation ne peut avoir de racines positives; de plus, elle ne peut avoir qu'une seule racine réelle négative, puisque si elle en avait plusieurs, elles seraient en nombre impair, et l'équation dérivée en aurait aussi plu-

sieurs, ce qui est impossible. Si ω est négatif, et plus grand que 1, elle ne peut avoir de racines négatives, car si on substitue -1 ou $-1-\delta$, le résultat sera négatif, et comme elle ne peut avoir de racines positives qu'en nombre impair, et que l'équation dérivée ne peut en avoir plus d'une, il en résulte que dans ce cas l'équation n'a qu'une seule racine réelle et $m-1$ imaginaires.

Si ω était égal à l'unité, l'équation

$$r^m - mr + (m-1)\omega = 0,$$

aurait trois racines réelles, parmi lesquelles, deux seraient égales à ± 1, selon que leur dernier terme serait positif ou négatif; ainsi dans ce cas, l'équation proposée a trois racines réelles, dont deux sont égales à $+\sqrt[m]{\frac{p}{m}}$ lorsque le dernier terme est positif, et deux sont égales à $-\sqrt[m]{\frac{p}{m}}$ lorsque le dernier terme est négatif.

134. Si le nombre m est pair, l'équation

$$x^m + px + q = 0$$

aura deux racines réelles, et ne pourra en ad-

mettre un plus grand nombre lorsque

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}+\left(\frac{p}{m}\right)^{m} \text{ sera } = \text{ ou } > 0,$$

et elle aura toutes ses racines imaginaires lorsque la même quantité sera plus petite que zéro. D'abord l'équation proposée ne pourra avoir plus de deux racines réelles, car si elle en avait un plus grand nombre, l'équation dérivée $mx^{m-1}+p=0$ aurait aussi plusieurs racines réelles, ce qui ne peut avoir lieu; de plus elle aura deux racines réelles lorsque la condition énoncée sera satisfaite; car si dans l'équation $x^m+px+q=0$, on substitue $r\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}}$ au lieu de x, on aura

$$r^m+mr+\frac{q}{\sqrt[m-1]{\left(\frac{p}{m}\right)^m}}=0$$

ou

$$r^m+mr+(m-1)\omega=0,$$

et selon que cette dernière équation aura deux racines réelles ou qu'elle n'en aura pas, la proposée en aura deux ou n'en aura point; or il peut arriver que dans cette équation ω soit positif ou négatif; si ω est positif, q est positif, si au contraire ω est négatif, q est aussi négatif,

et comme toute équation de degré pair dont le dernier terme est négatif, a toujours deux racines réelles, il en résulte que la proposée a aussi deux racines réelles, et dans ce cas la condition

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}+\left(\frac{p}{m}\right)^{m}>0,$$

est satisfaite. Il reste donc à considérer l'autre cas, c'est-à-dire celui où ω est positif; mais ce cas se subdivise lui-même en trois autres : le premier est celui où ω serait plus petit que l'unité, le second, celui où ω serait égal à l'unité, le troisième, celui où ω serait plus grand que l'unité. Considérons le cas où ω est plus petit que l'unité. Si dans l'équation

$$r^{m}+mr+(m-1)\omega=0,$$

on substitue 0 et -1, les résultats de ces deux substitutions sont de signes contraires ; ainsi il y a une racine réelle de comprise entre 0 et -1. Si on divise l'équation

$$r^{m}+mr+(m-1)\omega=0$$

par le facteur simple qui correspond à cette racine réelle, on aura une équation de degré impair dont le dernier terme sera positif, et qui par conséquent aura une racine réelle négative ; donc la proposée aura deux racines réelles et $m-2$ imaginaires.

Si $\omega = 1$, -1 satisfera à l'équation

$$r^m + mr + (m-1)\omega = 0,$$

et comme l'équation dérivée $r^{m-1} + 1 = 0$ est aussi satisfaite lorsque pour r on substitue -1, il en résulte que l'équation proposée a deux racines réelles égales et $m-2$ racines imaginaires.

Si ω est plus grand que l'unité, l'équation ne pourra avoir aucune racine réelle, car si on substitue -1, le résultat sera positif, et si on substitue $-1-\delta$, le résultat sera encore positif lorsque δ sera positif, ainsi l'équation

$$r^m + mr + (m-1)\omega = 0,$$

ne pourra avoir de racine négative plus grande que -1, elle ne pourra non plus en avoir de comprise entre 0 et -1, car si cela avait lieu il faudrait, à cause que les racines seraient en nombre pair, que l'équation dérivée

$$r^{m-1} + 1 = 0$$

ait au moins une racine réelle négative comprise entre 0 et -1, ce qui n'est pas, et comme l'équation $r^m + mr + (m-1)\omega = 0$ dans le cas que nous considérons, ne peut avoir

de racines positives, il en résulte que toutes les racines sont imaginaires, par conséquent toute équation de degré pair ne peut avoir de racines réelles lorsqu'on a

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}+\left(\frac{p}{m}\right)^{m}<0.$$

135. Il sera facile de déduire des articles précédens, que les équations d'un degré impair de la forme $x^m+px^{m-1}+q=0$, ne peuvent avoir plus de trois racines réelles, et que les équations d'un degré pair de la même forme ne peuvent en avoir plus de deux. Il sera également facile d'en déduire les caractères auxquels on reconnaîtra qu'une équation d'un degré impair de la forme précédente aura une ou trois racines réelles et de trouver dans quel cas une équation d'un degré pair de la même forme aura deux racines réelles ou toutes ses racines imaginaires; pour cela il suffira de transformer l'équation proposée en une autre dont les racines soient les réciproques de la première, car cette transformation fera rentrer les équations dont il s'agit dans celles que nous avons considérées, et il ne s'agira plus que d'appliquer sur celles-ci ce que nous avons dit sur les premières.

136. Les démonstrations que nous avons données précédemment touchant la réalité des trois racines dans les équations du troisième degré, lorsqu'elles se trouvent dans le cas irréductible, ne laissent rien à desirer, tant pour la rigueur que pour la simplicité; cependant comme la Géométrie fournit un moyen simple et élégant d'arriver aux mêmes conséquences, et qui n'a pas encore été remarqué, nous allons y joindre la démonstration suivante : elle paraîtra d'autant moins déplacée, qu'elle nous offrira les moyens de démontrer de la manière la plus simple, un théorème semblable pour les équations d'un degré quelconque, lorsqu'elles manquent de tous les termes intermédiaires entre le premier et l'avant-dernier, et qui comprendra comme cas particulier celui qui nous occupe.

137. Traçons sur un plan une droite AB, *fig.* 5, prenons sur cette droite un point à partir duquel nous compterons les distances de chacun des autres points de cette droite. Si on conçoit une courbe qui ait pour équation $y = x^3$, il est clair qu'elle passera par le point A, origine des coordonnées, puisque quand $x = 0$, on a $y = 0$; si ensuite on fait croître x tant du côté des abscisses positives que du côté des

abscisses négatives, les valeurs de y croîtront aussi, et comme les valeurs de x qui ne diffèrent que par le signe, donnent des valeurs de y qui ne diffèrent aussi que par le signe, il en résulte que la courbe se compose de deux parties parfaitement symétriques, l'une située au-dessus de l'axe et du côté des abscisses positives, et l'autre située au-dessous et du côté des abscisses négatives. Cela posé, si on veut considérer le cours de la courbe en-deçà et en-delà du point dont l'abscisse est x, on substituera $x+h$ au lieu de x dans l'équation de la courbe, et on aura pour l'accroissement de l'ordonnée, $3x^2h+3xh^2+h^3$, et comme le premier terme $3x^2h$ exprime les accroissemens des ordonnées d'une droite menée par le point de la courbe dont les coordonnées sont x et y, et qui fait avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est égale à $3x^2$, il en résulte que si par un point de la courbe dont l'abscisse est x, on mène une droite qui fasse avec la ligne AB, un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à $3x^2$, tous les points de cette courbe qui correspondent à des abscisses positives seront situés au-dessus de cette droite, puisque la différence des ordonnées de la courbe aux coordonnées

coordonnées de la droite, est égale à $3xh^2+h^3$, et que cette quantité est toujours positive tant que $3x+h$ est positif, ce qui a toujours lieu quel que soit le signe de h pour toutes les valeurs positives de x, par conséquent la droite est tangente à la branche supérieure et coupe la branche inférieure lorsque $3x+h=0$, c'est-à-dire, à une distance de l'origine égale à $-2x$. Si on considère les points de la courbe qui correspondent à des abscisses négatives, et que par le point dont l'abscisse est $-x$, on mène une droite qui fasse avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à $3x^2$, on verra, 1°. que cette droite laissera tous les points de la branche inférieure du même côté, et par suite qu'elle sera tangente à la courbe; 2°. qu'elle coupera la branche supérieure en un point dont l'abscisse est $2x$; 3°. que les tangentes qui correspondent à des abscisses qui ne diffèrent que par le signe, sont parallèles; 4°. que toutes les lignes qui leur seront menées parallèlement et extérieurement, ne pourront couper la courbe qu'en un seul point, et qu'enfin toute droite qui leur sera menée parallèlement, et qui sera placée entr'elles, coupera la courbe en trois points, dont deux seront sur la

branche supérieure et un sur la branche inférieure, si la droite coupe l'axe des x du côté des abscisses positives, et dont un seul sera sur la branche supérieure et deux sur la branche inférieure, si cette droite coupe l'axe du côté des abscisses négatives.

Si on cherche la distance de l'origine au point où une tangente à la courbe coupe l'axe, on aura

$$AT = AP - PT,$$

mais $AP = x$, d'ailleurs

$$PT = \frac{PM}{\text{tang } PTM},$$

ainsi on aura, à cause que $PM = x^3$ et que tang $PTM = 3x^2$,

$$PT = \frac{x}{3},$$

par conséquent

$$AT = \frac{2x}{3}.$$

Cela posé, si on construit la droite dont l'équation est $y = -px - q$, elle coupera l'axe des x à une distance de l'origine égale à $\frac{q}{p}$, et si on mène une tangente à la courbe qui soit parallèle à cette droite, il faudra qu'on ait

$$3x^2 = -p,$$

et par suite,

$$x = \sqrt{-\frac{p}{3}},$$

ce qui montre que cela n'est possible qu'autant que p sera négatif. Si on porte cette valeur dans l'expression de AT qui est $\frac{2x}{3}$, on aura $\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et selon que $\frac{q}{p}$ sera plus petit ou plus grand que $\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$ la droite dont l'équation est $y = -px - q$, coupera la courbe en trois points ou bien en un seul; mais aux points d'intersection de la droite et de la courbe les y sont les mêmes, ainsi on aura

$$x^3 = -px - q,$$

ou

$$x^3 + px + q = 0;$$

par conséquent les abscisses qui correspondent aux points d'intersection, sont des racines de cette équation, et comme les intersections sont au nombre de trois lorsqu'on a

$$-\frac{q}{p} < \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

ou

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

il en résulte que les trois racines sont réelles

lorsqu'on a

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0;$$

lorsqu'au contraire on a

$$-\frac{q}{p}>\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}};$$

il n'y a qu'un seul point d'intersection ; ainsi lorsque p est négatif et que $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est plus grand que zéro, une seule racine est réelle. Si p était positif, la droite dont l'équation est $y=-px-q$ ne pourrait être parallèle à aucune tangente à la courbe, et ne pourrait la couper qu'en un seul point ; ainsi, que p soit positif ou négatif, l'équation $x^3+px+q=0$ ne peut avoir qu'une seule racine réelle.

Si la droite dont l'équation est $y=-px-q$ touchait la courbe, il faudrait regarder cette droite comme la coupant en deux points infiniment près, ce qui ferait qu'il y aurait dans l'équation proposée deux racines égales et de signes contraires à la moitié de la troisième, puisque le point d'intersection de la tangente avec la branche inférieure correspond toujours à une abscisse double et de signe contraire à celle du point de tangence ; par conséquent lorsque

$$-\frac{q}{p}=\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}};$$

ou, ce qui revient au même, lorsque

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0,$$

les trois racines sont encore réelles, mais deux sont égales entr'elles et de signe contraire à la moitié de la troisième.

138. Les considérations géométriques dont nous venons de faire usage, vont nous servir à démontrer, 1°. que toute équation de degré impair de la forme $x^m+px+q=0$, a toujours trois racines réelles, et $m-3$ racines imaginaires lorsque $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}+\left(\frac{p}{m}\right)^m$ est une quantité négative et nulle, ou qu'elle n'en a qu'une seule de réelle, et par conséquent $m-1$ racines imaginaires lorsque cette même quantité est positive; 2°. que toute équation de degré pair de la même forme que la précédente, a toujours deux racines réelles et $m-2$ racines imaginaires, lorsque $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}+\left(\frac{p}{m}\right)$ est nul ou positif, et qu'elle ne peut en avoir de réelles lorsque cette même quantité est négative.

139. Pour démontrer la première partie, construisons une courbe dont l'équation soit $y=x^m$; si dans cette équation on fait $x=0$,

on a $y = 0$, ainsi la courbe passe par l'origine des coordonnées, et comme aux valeurs de x qui sont égales et de signes contraires, correspondent des valeurs de y qui ne diffèrent que par le signe, il en résulte que la courbe a deux branches situées l'une au-dessus de l'axe et l'autre au-dessous, et qui s'étendent indéfiniment, l'une du côté des abscisses positives, et l'autre du côté des abscisses négatives. Si l'on veut considérer les ordonnées de cette courbe qui suivent et qui précèdent immédiatement celle qui correspond à l'abscisse x, il faut substituer $x + i$ au lieu de x, et comme le résultat de cette substitution est

$$x^m + mx^{m-1} i + \frac{m.m-1}{2} x^{m-2} i^2 + \text{etc.},$$

on voit que l'ordonnée qui correspond à l'abscisse $x+i$, se compose de l'ordonnée qui correspond à l'abscisse x et d'une suite de termes affectés des puissances successives de i; mais le premier de ces termes étant proportionnel à l'accroissement i, il en résulte que la somme des deux premiers termes représente les ordonnées d'une droite menée par le point de la courbe dont l'abcisse est x, et sous un angle dont la tangente trigonométrique est mx^{m-1}, et comme pour toutes les

valeurs positives de i les ordonnées de la courbe sont plus grandes que les ordonnées de la droite, et que d'ailleurs on peut prendre i assez petit pour que la somme des termes qui suivent les deux premiers termes du développement de $(x - i)^m$ soit de même signe que le troisième terme qui est positif; il s'ensuit que les ordonnées de la courbe qui suivent et qui précèdent immédiatement celle du point que l'on considère, sont plus grandes que les ordonnées correspondantes de la droite, quel que soit d'ailleurs le point de la courbe que l'on considère; par conséquent la droite est tangente et la convexité de cette courbe est tournée du côté de l'axe des abscisses. Pour avoir la distance AT de l'origine au point où cette tangente coupe l'axe, il faudra de $AP = x$ retrancher PT qui est égal à $\frac{PM}{\text{tang PTM}}$ ou à $\frac{x}{m}$; par conséquent $AT = \frac{m-1}{m}x$. Si on construit la droite dont l'équation est $y = -px - q$, on verra qu'elle coupera la courbe en un seul point lorsque p sera positif, et qu'elle ne pourra jamais la couper en un plus grand nombre; par conséquent il y aura toujours dans ce cas une valeur de x qui donnera $x^m = -px - q$, ou $x^m + px + q = 0$,

et comme il ne pourra y en avoir qu'une, il en résulte que si p est positif, l'équation ... $x^m + px + q = 0$ ne pourra avoir qu'une seule racine réelle, et que les deux autres seront imaginaires. Si on cherche les points de la courbe pour lesquels les tangentes sont parallèles à la droite dont l'équation est $y = -px - q$, il faudra qu'on ait pour ces points $mx^{m-1} = -p$, et par suite,

$$x = \pm \sqrt[m-1]{-\frac{p}{m}};$$

ce qui montre qu'on ne peut mener aucune tangente parallèle à la droite dont l'équation est $y = -px - q$ lorsque p est positif, et qu'on peut toujours en mener deux lorsque p est négatif. Si la droite dont l'équation est $y = -px - q$ est comprise entre les deux tangentes qui lui sont menées parallèlement, il y aura trois points d'intersection, et si au contraire elle est extérieure à ces deux tangentes, il n'y en aura qu'un seul : or, dans le premier cas la distance de l'origine au point où la droite coupe l'axe, est plus petite, abstraction faite du signe, que la distance de la même origine au point où l'une ou l'autre des tangentes coupent ce même axe; dans le second cas, au contraire, cette dis-

tance est toujours plus grande lorsqu'on n'a pas égard au signe, et comme la distance de l'origine au point où la droite proposée coupe l'axe, est égale à $\frac{q}{p}$ lorsque p est négatif, et que celle de l'origine au point où une des tangentes menées parallèlement à cette droite coupe le même axe, est égale à $\frac{m-1}{m}\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}}$, il en résulte que la courbe sera coupée en trois points ou en un seul, selon que $\frac{q}{p}$ sera plus petit ou plus grand que $\frac{m-1}{m}\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}}$; par conséquent il y aura trois valeurs de x qui donneront

$$x^m = px + q, \quad \text{ou} \quad x^m - px + q = 0,$$

lorsque $\frac{q}{p}$ sera $<$ que $\frac{m-1}{m}\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}}$ ou, ce qui revient au même, lorsqu'on aura

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} - \left(\frac{p}{m}\right)^m < 0,$$

et au contraire il n'y en aura qu'une seule lorsque la même quantité sera plus grande que zéro; ainsi une équation d'un degré impair

de la forme $x^m + px + q = 0$ aura trois racines réelles, lorsqu'en prenant les coefficiens p et q avec leurs signes, on aura

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{p}{m}\right)^m < 0,$$

et l'équation n'aura qu'une seule racine réelle, lorsque les coefficiens p et q étant pris avec leur signes, on aura

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{p}{m}\right)^m > 0.$$

140. Considérons maintenant le second cas, c'est-à-dire celui de m pair. Si on construit la courbe dont l'équation est $y = x^m$, *fig.* 6, on verra qu'elle passe par l'origine des coordonnées, puisque $y = 0$ lorsque $x = 0$, et comme à toutes les valeurs positives ou négatives de x correspondent des valeurs positives de y, il en résulte que la courbe s'étend indéfiniment dans le sens des ordonnées positives, tant du côté des abscisses positives que du côté des abscisses négatives, et qu'elle est placée symétriquement par rapport à l'axe des ordonnées, puisque pour des valeurs de x égales et de signes contraires, les valeurs de

y sont les mêmes. Cela posé, si par un point de la courbe dont l'abscisse est x, on mène une tangente à cette courbe, elle fera avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique sera égale à mx^{m-1}, et elle coupera cet axe à une distance de l'origine qui sera égale à $\frac{m-1}{m}x$; si l'on cherche quels sont les points de la courbe pour lesquels les tangentes sont parallèles à la droite dont l'équation est $y = -px - q$, il faudra qu'on ait $mx^{m-1} = -p$, et par suite $x = \sqrt[m-1]{-\frac{p}{m}}$; par conséquent il existe toujours un point sur la courbe pour lequel la tangente est parallèle à la droite proposée : si on cherche la distance AT′ de l'origine au point où la tangente coupe l'axe des y, on aura

$$AT' = AP' - T'P',$$

mais

$$T'P' = P'M \text{ tang } P'MT' = mx^m,$$

d'ailleurs $AP' = x^m$, ainsi

$$AT' = (m-1)x^m = -\frac{m-1}{m}p\sqrt[m-1]{-\frac{p}{m}}.$$

Or il est facile de se convaincre, et l'inspection seule de la figure suffira pour le faire voir, que la courbe est située toute entière au-dessus de la tangente, et que la droite proposée coupera la courbe en deux points, lorsqu'elle coupera l'axe des ordonnées à une distance de l'origine plus grande que AT', et qu'au contraire elle ne pourra la couper en aucun point lorsque cette même distance sera moindre que AT', les distances étant prises avec leurs signes; or la distance de l'origine au point où la droite dont l'équation est $y = -px - q$, coupe l'axe des y, est égale à $-q$; ainsi, selon que $-q$ sera $>$ ou $<$ que $\frac{m-1}{m} p \sqrt[m-1]{-\frac{p}{m}}$ la courbe sera coupée en deux points ou ne le sera point du tout, par conséquent l'équation $x^m + px + q = 0$ aura deux racines réelles lorsqu'on aura

$$-q > \frac{m-1}{m} p \sqrt[m-1]{-\frac{p}{m}},$$

ou, ce qui revient au même, lorsqu'on aura

$$\left(\frac{p}{m}\right)^m - \left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} > 0,$$

et l'équation n'aura qu'une racine réelle lorsque la même quantité sera plus petite que zéro.

Si $\left(\frac{p}{m}\right)^m - \left(\frac{q}{m-1}\right)$ était égal à zéro, les deux points d'intersection se réuniraient, et l'équation aurait deux racines égales.

141. La forme sous laquelle se présente l'expression générale des racines dans une équation du troisième degré qui tombe dans le cas irréductible, ne permet point qu'on puisse la faire servir à trouver la valeur numérique de ces racines, parce que chacune des parties dont elle se compose, se présente sous une forme imaginaire qui ne paraît se prêter à aucune transformation propre à obtenir une expression qui soit entièrement dégagée d'imaginaires. La raison pour laquelle chacune des deux parties dont nous venons de parler se présente sous une forme imaginaire, tient à ce qu'on a voulu, par le procédé qu'on a suivi pour résoudre l'équation, que chaque racine soit composée de deux parties dont la somme des cubes et le produit des cubes soient respectivement égaux à des nombres donnés; mais comme cela est impossible lorsque le coefficient de l'avant-dernier terme est négatif, et que le cube du tiers de ce coefficient est plus grand que le carré de la moitié du dernier terme, il a bien fallu que l'Algèbre manifestât cette impossibilité, en pré-

sentant chacune des parties dont il s'agit sous une forme imaginaire; cependant, comme les différens procédés de résolution qu'on a employés ont toujours conduit aux mêmes formules, on ne sait pas si lorsque les trois racines sont réelles, la détermination des racines sous une forme finie algébrique et débarrassée de toute espèce d'imaginaires, est possible. C'est dans l'impossibilité où l'on se trouve actuellement de les présenter sous cette forme, qu'on a donné à ce cas, ainsi que nous l'avons déjà dit, le nom de *cas irréductible.*

142. Malgré l'impossibilité où l'on est de pouvoir obtenir sous une forme finie et algébrique, l'expression rigoureuse des racines lorsque $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est négatif, cela n'empêche point qu'on ne puisse faire servir l'expression connue des racines, même dans le cas que nous considérons, à trouver les racines approchées de l'équation proposée. En effet, si on représente la quantité a par $\{m+n\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}}$ la quantité b le sera par $\{m-n\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}}$, mais les développemens de $\{m+n\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}}$ et de $\{m-n\sqrt{-1}\}^{\frac{1}{3}}$ ne différant que par les

signes des termes affectés des puissances impaires de $\sqrt{-1}$, il en résulte que si on les ajoute, tous les termes affectés de $\sqrt{-1}$ s'en iront, et qu'il ne restera qu'une suite de termes réels; ainsi la somme des deux séries est réelle : si au lieu d'ajouter les deux développemens on retranche le second du premier, tous les termes réels disparaîtront, et il ne restera que des termes multipliés par $\sqrt{-1}$, par conséquent $a - b$ sera le produit d'une quantité réelle par $\sqrt{-1}$. Si les séries sont convergentes, leur somme et leur différence convergeront respectivement vers les valeurs de $a + b$ et de $a - b$; de sorte qu'en les substituant pour $a + b$ et $a - b$ dans les formules

$$\begin{array}{l} a + b \\ -\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{-1} \\ -\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sqrt{-1}, \end{array}$$

on aura des quantités qui s'éloigneront d'autant moins des véritables valeurs des racines, que celles qu'on aura substituées pour $a + b$ et $a - b$ approcheront plus de l'exactitude.

143. De ce qui vient d'être dit, il semblerait qu'on pourrait conclure que dans le cas irréductible, les trois racines sont réelles, mais cette conséquence serait tout à fait illusoire si on n'avait pas d'autres moyens d'en constater l'exactitude; car bien que la somme des termes de l'une et de l'autre suite soit réelle, quelque loin que l'on pousse le développement de chacune des fonctions représentées par a et b; il pourrait se faire que les fonctions qui servent à compléter les termes de l'une et de l'autre suite, lorsque dans chacune d'elles on s'arrête au même nombre de termes, soient imaginaires, et que l'imaginarité qui se trouve dans l'une, ne détruisît point l'imaginarité qui se trouve dans l'autre; c'est du moins ce dont il est permis de douter, jusqu'à ce qu'on ait démontré le contraire; d'ailleurs il est facile de se convaincre que chacune des fonctions complémentaires est de même nature que celles que nous avons désignées par a et b, et qu'elles se trouvent elles-mêmes dans le cas irréductible du troisième degré; ainsi la difficulté d'où l'on est parti, serait ramenée au même point. Cela n'empêche point cependant que les conclusions tirées dans l'article précédent, ne soient parfaitement exactes; car comme nous avons

démontré

démontré indépendamment d'aucun développement en séries que les trois racines sont réelles, il faut que la somme des fonctions qui servent à compléter les développemens de a et de b, soit réelle, et que leur différence soit égale à la racine carrée d'une quantité négative.

144. Quant au degré d'approximation des racines, il sera d'autant plus rapide, ainsi que nous l'avons déja dit, que les séries dans lesquelles se transforment les fonctions a et b seront plus convergentes, parce que les fonctions complémentaires iront sans cesse en diminuant; mais si les séries étaient convergentes, elles ne pourraient servir à trouver les valeurs des racines, parce que les fonctions qui servent à les compléter iraient toujours en croissant à mesure qu'on prendrait un plus grand nombre de termes.

145. Pour montrer, par un exemple, combien il importe d'avoir égard aux fonctions complémentaires, lorsqu'on fait usage des développemens en séries, nous allons considérer le développement de $\sqrt{(x-i)}$. Si dans ce développement on prend le premier terme ou les deux premiers ou les trois premiers, et ainsi de suite, les fonctions complémentaires correspondantes

$$-\frac{1}{\sqrt{(x-i)}+\sqrt{x}}i$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}\,[\sqrt{(x-i)}+\sqrt{x}]}i^2$$

$$-\frac{\sqrt{(x-i)}+\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}\,[\sqrt{(x-i)}+\sqrt{x}]^3}i^3,$$

.....

et quelles que soient les valeurs que l'on donne à x et à i, on est assuré qu'en ayant égard à ces fonctions, l'expression est rigoureusement égale à la racine carrée de $x-i$, et qu'en les employant, il est indifférent que la série soit convergente ou qu'elle ne le soit pas; mais si on cesse de s'en servir, on a lieu de craindre que le résultat ne diffère beaucoup du véritable, et même qu'il n'en diffère de plus en plus, à mesure que le nombre de termes que l'on prendra sera plus considérable; cela aura lieu toutes les fois que les termes de la série iront continuellement en augmentant : il pourrait même se faire que dans ce cas on trouvât une quantité réelle au lieu d'une quantité imaginaire; c'est ce qui arriverait si dans cette série on substituait pour i une quantité plus grande que x, car les termes de la série ne cessant point d'être réels, leur somme est aussi réelle,

ıelque éloigné d'ailleurs que soit le dernier
:s termes que l'on considère; et comme l'hy-
)thèse de $i > x$ donne pour la racine carrée
: $x - i$ une quantité imaginaire, il faut en
)nclure qu'à un développement réel peut cor-
spondre une expression imaginaire.

146. Il ne reste plus maintenant pour com-
éter tout ce qui tient aux équations du troi-
ème degré, qu'à donner les formules qui
)nviennent au cas où l'équation est complète,
t à donner la relation qui doit exister entre
s coefficiens de cette équation, pour que les
'ois racines soient réelles, après quoi nous
onnerons leur résolution par les Tables des
inus.

147. Pour obtenir les formules dont nous vé-
ons de parler, nous représenterons l'équation
énérale du troisième degré par

$$z^3 + kz^2 + mz + n = 0,$$

uis nous substituerons au lieu de z, $x - \frac{k}{3}$,
e résultat de cette substitution sera

$$x^3 - \left\{ \frac{k^2}{2} - m \right\} x + \frac{2k^3}{27} - \frac{km}{3} + n = 0.$$

Si dans les formules que nous avons obtenues plus haut (116), on remplace p par

$$-\left\{\frac{k^2}{2}-m\right\} \text{ et } q \text{ par } \frac{2k^3}{27}-\frac{km}{3}+n,$$

on aura, en ajoutant $-\frac{k}{3}$ au résultat, les formules qui se rapportent au cas où l'équation est complète. Quant à la réalité des trois racines, on voit qu'elle aura lieu lorsqu'on aura

$$\left\{\frac{k^3}{27}-\frac{km}{6}+\frac{n}{2}\right\}^2 = \text{ou} < \left\{\frac{k^2}{6}-\frac{m}{3}\right\}^3.$$

148. Avant de passer à la résolution des équations du troisième degré par les lignes trigonométriques, nous allons indiquer un moyen assez simple de trouver d'une manière approchée les trois racines de cette équation, lorsqu'elle se trouve dans le cas irréductible; ce moyen consiste à ramener la recherche des racines de cette équation, à celles d'une équation du même degré et de la même forme, mais dans laquelle le coefficient de l'avant-dernier terme est l'unité; c'est à quoi on parviendra en divisant les racines de l'équation

$$x^3 - px + q = 0$$

par $\sqrt{p}$, ou, ce qui revient au même, en y

substituant $z\sqrt{p}$ au lieu de x; si on fait cette substitution, l'équation qui en résultera sera

$$z^3 - z + \frac{q}{p\sqrt{p}} = 0.$$

Cela posé, si q est négatif, une des valeurs de z sera plus grande que l'unité, puisque si elle était plus petite, la quantité $z^3 - z - \frac{q}{p\sqrt{p}}$ serait négative; mais si on substitue $\frac{2}{\sqrt{3}}$ au lieu de z, le résultat sera $\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q}{p\sqrt{p}}$, et par suite négatif, puisqu'on a $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$; par conséquent l'équation a une racine de comprise entre 1 et $\sqrt{\frac{4}{3}}$: si donc on fait $z = 1 + u$, la quantité u sera très-petite ou du moins assez petite pour qu'on puisse négliger sa troisième puissance dans le résultat de la substitution de $1 + u$ à la place de z dans l'équation

$$z^3 - z - \frac{q}{p\sqrt{p}} = 0;$$

si on fait la substitution dont nous venons de parler, on aura, en omettant le terme en u^3, une équation du second degré, de laquelle on déduira une valeur positive de u peu différente

de celle qu'il faudrait ajouter à l'unité pour avoir exactement une des valeurs de z; mais si on ne juge pas cette approximation suffisante, on pourra faire servir celle-ci, à l'aide du même procédé, à en obtenir une plus rapprochée, et ainsi de suite : lorsqu'on aura ainsi obtenu une racine, on la retranchera du second terme de l'équation, ce qui revient à la prendre en moins; puis on divisera le dernier terme par cette racine, prise avec un signe contraire; la première de ces opérations donne la somme des deux autres racines de l'équation, et la seconde donne les produits de ces mêmes racines : retranchant du carré de la somme des deux quantités le quadruple du produit de ces mêmes quantités, on aura le carré de leur différence; par conséquent si on tire la racine carrée du résultat, on aura leur différence; ajoutant et soustrayant successivement la demi-différence de la demi-somme, on aura chacune des racines. Si q était positif, on changerait z en $-z$, et l'équation qui en résulterait rentrerait dans celle que nous venons de considérer.

Résolution des Équations du troisième degré par les Tables des sinus.

149. Si on pose l'équation $x = a + b$, et qu'ensuite on élève les deux membres au cube, on aura

$$x^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b);$$

transposant tous les termes du second membre dans le premier, il en résultera, à cause que $a + b = x$,

$$x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0;$$

la comparaison de cette équation avec

$$x^3 + px + q = 0,$$

fournit les équations

$$ab = -\frac{p}{3} \quad \text{et} \quad a^3 + b^3 = -q,$$

de la première on tire $b = -\frac{p}{3a}$: substituant pour b sa valeur dans l'équation

$$x = a + b,$$

on aura

$$x = a - \frac{p}{3a};$$

Si on la substitue dans l'équation

$$a^3 + b^3 = -q,$$

on aura

$$a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = -q;$$

faisant disparaître les dénominateurs, on aura une équation du sixième degré que l'on pourra résoudre à la manière de celles du second, et qui servira à déterminer la valeur de a; ayant cette valeur de a, on la portera dans l'équation

$$x = a - \frac{p}{3a},$$

et on aura une formule qui se réduira à celle que nous avons trouvée plus haut.

150. Si on met la valeur de x sous la forme

$$\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\frac{a}{\sqrt{\frac{p}{3}}} - \frac{\sqrt{\frac{p}{3}}}{a}\right\},$$

et que l'on divise l'équation $a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = -q$ par $\sqrt{\frac{p^3}{27}}$, on aura

$$\frac{a^3}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}} - \frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{a^3} = \frac{-q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}.$$

Si on fait $\frac{a}{\sqrt{\frac{p}{3}}} = z$, on aura

$$\frac{a^3}{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}} = z^3 \quad \text{et} \quad \frac{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}}{a^3} = \frac{1}{z^3},$$

et par suite,

$$\frac{a^3}{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}} - \frac{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}}{a^3} = z^3 - \frac{1}{z^3},$$

et comme le premier membre est égal à $\frac{-q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$, on aura

$$z^3 - \frac{1}{z^3} = -\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}};$$

si on fait $z^3 = \text{tang}\,\varphi$, on aura $\frac{1}{z^3} = \cot\,\varphi$; substituant pour z^3 et $\frac{1}{z^3}$ leurs valeurs dans l'équation précédente, on aura

$$\text{tang}\,\varphi - \cot\,\varphi = -\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}};$$

or

$$\text{tang}\,\varphi - \cot\,\varphi = \frac{\sin\,\varphi}{\cos\,\varphi} - \frac{\cos\,\varphi}{\sin\,\varphi} = -2\cot 2\varphi,$$

ainsi

$$\cot 2\varphi = \frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}};$$

si donc on pose

$$\cot 2\varphi = \frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$

l'angle φ sera déterminé, et par suite la valeur de z; si on fait tang φ = tang $^3\psi$, on aura

$$z^3 = \text{tang}^3\psi;$$

de cette dernière équation on tire

$$z = \text{tang}\,\psi$$
$$z = \alpha.\,\text{tang}\,\psi$$
$$z = \alpha^2.\,\text{tang}\,\psi.$$

Substituant pour z successivement les trois valeurs que nous venons de trouver dans la valeur de x qui est $\sqrt{\frac{p}{3}}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, on aura, à cause que $\alpha^3 = 1$,

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\{\text{tang}\,\psi - \text{cot}\,\psi\}$$
$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\{\alpha\,\text{tang}\,\psi - \alpha^2\text{cot}\,\psi\}$$
$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\{\alpha^2\,\text{tang}\,\psi - \alpha\,\text{cot}\,\psi\}.$$

Si dans ces formules on remplace α et α^2 par leurs valeurs, qui sont $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, on aura, à cause que tang ψ − cot ψ = 2 cos 2ψ,

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}.\,\text{cot}\,2\psi$$
$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\{\text{cot}\,2\psi + \text{coséc}\,2\psi.\sqrt{-3}\},$$
$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\{\text{cot}\,2\psi - \text{coséc}\,2\psi.\sqrt{-3}\},$$

151. Les formules précédentes sont pour le cas où p est positif, si p était négatif, les équations

$$x = a - \frac{p}{3a} \quad \text{et} \quad a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = -q$$

deviendraient

$$x = a + \frac{p}{3a} \quad \text{et} \quad a^3 + \frac{p^3}{27a^3} = -q;$$

la première de ces deux équations peut être mise sous la forme

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}} \left\{ \frac{a}{\sqrt{\frac{p}{3}}} + \frac{\sqrt{\frac{p}{3}}}{a} \right\}.$$

La seconde, divisée par $\sqrt{\frac{p}{27}}$, deviendra

$$\frac{a^3}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}} + \frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{a^3} = -\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}};$$

si on représente $\frac{a}{\sqrt{\frac{p}{3}}}$ par z, les deux dernières équations deviendront

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}} \left\{ z + \frac{1}{z} \right\}$$

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \frac{-q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}};$$

si on pose z égal à la tangente d'un certain angle φ, on aura

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \text{tang}\,\varphi + \cot\varphi = \frac{2}{\sin 2\varphi};$$

ainsi

$$\frac{2}{\sin 2\varphi} = -\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}};$$

de cette équation on tirera la valeur de $\sin 2\varphi$, ce qui donnera la valeur de l'angle φ; sur quoi on peut observer qu'il est indifférent de prendre pour 2φ l'un ou l'autre des arcs dont le sinus est égal à $-\frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\frac{1}{2}q}$, parce que la tangente de l'un des arcs est la cotangente de l'autre, et réciproquement : lorsqu'on aura déterminé φ, on fera

$$\text{tang}\,\varphi = \text{tang}\,{}^3\downarrow,$$

et on aura, à cause de $z^3 = \text{tang}\,\varphi$, l'équation

$$z^3 = \text{tang}\,{}^3\downarrow,$$

de cette équation on tirera

$$z = \text{tang}\,\downarrow$$
$$z = \alpha\,\text{tang}\,\downarrow$$
$$z = \alpha^2\text{tang}\,\downarrow;$$

si on substitue successivement chacune de ces trois valeurs de z dans l'équation

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \left\{ z + \frac{1}{z} \right\},$$

on aura pour les trois racines de l'équation du troisième degré, les trois valeurs suivantes,

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}} \{ \text{tang } \downarrow + \text{cot } \downarrow \}$$

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}} \{ \alpha \text{ tang } \downarrow + \alpha^2 \text{cot } \downarrow \}$$

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}} \{ \alpha^2 \text{tang } \downarrow + \alpha \text{ cot } \downarrow \}.$$

Si dans ces trois équations on remplace α et α^2 par leurs valeurs qui sont $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, on aura, à cause que tang $\downarrow$ + cot $\downarrow$ = 2 coséc 2$\downarrow$,

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \text{coséc } 2\downarrow$$

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}} \{ \text{coséc } 2\downarrow + \text{cot } 2\downarrow . \sqrt{-3} \}$$

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}} \{ \text{coséc } 2\downarrow - \text{cot } 2\downarrow . \sqrt{-3} \}.$$

152. Avant d'aller plus loin, nous observerons

que l'équation au moyen de laquelle on détermine l'angle φ, ne peut exister qu'autant que $\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$ sera plus petit que l'unité, puisqu'on a

$$\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}{\frac{1}{2}q},$$

et que d'ailleurs sin 2φ ne peut surpasser l'unité; ainsi les formules que nous venons de donner en dernier lieu ne peuvent être employées lorsque p est négatif et que $\frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\frac{1}{2}q}$ est plus petit que 1, ou, ce qui revient au même, lorsque $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ est positif; ces formules ne peuvent donc servir que dans le cas où p serait négatif, et qu'on aurait $\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}} > 2$.

153. Pour sentir la raison pour laquelle l'analyse précédente semble échapper au cas où $\frac{+q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$ est moindre que deux, c'est que dans ce cas il est impossible de trouver pour z une quantité réelle qui puisse satisfaire à l'équation

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \frac{-q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$

puisque la somme de deux quantités réciproques ne peut jamais être moindre que 2; par conséquent lorsque nous avons posé

$$z^3 = \text{tang}\,\varphi,$$

nous avons fait une supposition qui ne pouvait avoir lieu; il faut donc pour ce cas chercher des formules qui puissent y convenir.

154. Pour y parvenir, nous observerons que quoiqu'il ne soit pas possible de déterminer pour z une quantité réelle qui satisfasse à l'équation

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = -\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$

cela n'empêche pas que l'on ne puisse obtenir pour $z + \frac{1}{z}$, et par conséquent pour x, une quantité réelle, car on a

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \left\{z + \frac{1}{z}\right\}^3 - 3\left\{z + \frac{1}{z}\right\};$$

ainsi

$$\left\{z + \frac{1}{z}\right\}^3 - 3\left\{z + \frac{1}{z}\right\} = -\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}} = 2x,$$

ou

$$\left\{z+\frac{1}{z}\right\}^3-3\left\{z+\frac{1}{z}\right\}-2\omega=0;$$

ω étant plus petit que l'unité. Si dans cette équation on substitue successivement pour $z+\frac{1}{z}$, les nombres $-2, -1, 0, 1, 2$, les signes des résultats correspondans seront, lorsque ω sera positif,

$$-, +, -, -, +,$$

et lorsque ω sera négatif,

$$-, +, +, -, +.$$

Ainsi, puisque les résultats des substitutions donnent trois variations de signes, quelque soit le signe de ω, il en résulte qu'il y a trois valeurs réelles de $z+\frac{1}{z}$ qui satisfont à l'équation

$$z^3+\frac{1}{z^3}=-\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}};$$

Pour obtenir ces trois valeurs, nous observerons que les valeurs de $z+\frac{1}{z}$ étant comprises entre -1 et $+2$, on pourra faire

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\varphi;$$

de là

de là on tire

$$z = \cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi,$$

et

$$\frac{1}{z} = \cos\varphi - \sqrt{-1}.\sin\varphi;$$

par conséquent

$$z^3 = \cos 3\varphi + \sqrt{-1}.\sin 3\varphi,$$

et

$$\frac{1}{z^3} = \cos 3\varphi - \sqrt{-1}.\sin 3\varphi,$$

ainsi

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = 2\cos 3\varphi,$$

et comme

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = -\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$

on aura

$$2\cos 3\varphi = -\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}.$$

Cette équation servira à déterminer le cosinus du triple de l'angle φ ; quand on aura cet angle on en prendra le tiers, et on aura l'angle φ ; mais comme il y a plusieurs arcs dont le cosinus du triple est le même, puisqu'un arc augmenté d'un multiple de la circonférence, a le même cosinus, il en résulte que l'é-

quation qui donne le cosinus de 3φ, donne celui de $3\varphi + kc$, k étant un nombre quelconque positif ou négatif, et c désignant une circonférence, ainsi le tiers de cet angle sera $\varphi + \frac{kc}{3}$, par conséquent

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\left\{\varphi + \frac{kc}{3}\right\};$$

mais on a $x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, ainsi on aura

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos\left\{\varphi + \frac{kc}{3}\right\}:$$

si dans cette formule on fait successivement $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, on aura

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos\varphi$$

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos\left\{\varphi + \frac{c}{3}\right\}$$

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos\left\{\varphi + \frac{2c}{3}\right\}.$$

Quant aux valeurs de $z + \frac{1}{z}$ qui résulteraient des autres valeurs de k, il est facile de voir qu'elles rentreraient dans celles qu'on a trouvées, ainsi les trois valeurs de x qu'on vient de donner, sont les seules racines de l'équation proposée.

155. L'équation $z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$ sur laquelle repose tout le calcul de l'article précédent, a été établie sur ce que les trois valeurs de $z + \frac{1}{z}$ étaient réelles et comprises entre $+2$ et -2; mais on aurait pu y être conduit d'une autre manière : il suffisait, pour cela, de savoir que $z + \frac{1}{z}$ avait au moins une valeur réelle, puisque la valeur de x qui en dépend en a au moins une, et que la valeur de z ne pouvait être réelle, puisque si le contraire avait lieu, $z^3 + \frac{1}{z^3}$ pourrait être plus grand que 2, ce qui est impossible. Si on représente par r la valeur réelle de $z + \frac{1}{z}$, on aura

$$z = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{r^2}{4} - 1\right\}}.$$

Mais z devant être imaginaire, $\frac{r^2}{4}$ doit être plus petit que l'unité, ainsi $\frac{r}{2}$ est aussi plus petit que ± 1, et comme les valeurs des cosinus embrassent toute cette latitude, on pourra représenter $\frac{r}{2}$ par $\cos\varphi$, ou la quantité r par $2\cos\varphi$, au moyen de quoi on sera conduit aux trois valeurs

de x, que nous avons données plus haut, et par suite, à montrer la réalité des trois racines de l'équation proposée, lorsque $\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$ est plus petit que 2, ou, ce qui revient au même, lorsque $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est plus petit que zéro, ce qui est le cas connu sous le nom de *cas irréductible*.

156. Quant à la démonstration que la somme de deux quantités réciproques est plus grande que 2, elle se présente d'elle-même; car si les deux quantités ne sont pas égales à l'unité, ce qui ferait exception, il faut que l'une d'elles soit plus grande que l'unité, et que l'autre soit plus petite. Si on représente la première par $1 + m$, la seconde sera $\frac{1}{1+m}$, et comme celle-ci est égale à $1 - \frac{m}{1+m}$, toutes deux équivaudront à $2 + m - \frac{m}{1+m}$; d'ailleurs m est plus grand que $\frac{m}{1+m}$, ainsi le résultat est plus grand que 2 : c'est d'ailleurs ce qu'on peut reconnaître par le seul raisonnement, car la plus grande des deux fractions surpasse l'unité d'une fraction qui a pour numérateur la différence des deux termes de la première, et pour dénomi-

nateur celui de la première fraction; la plus petite quantité, au contraire, est moindre que l'unité d'une fraction qui a pour numérateur la différence des deux termes de la seconde fraction et pour dénominateur le dénominateur de cette seconde fraction; par conséquent, si la fraction qui exprime l'excès de la première quantité sur l'unité, surpasse celle qu'il faudrait ajouter à la seconde quantité pour avoir l'unité, la somme des deux quantités réciproques sera plus grande que 2; c'est aussi ce qui arrive : car ces deux fractions ont le même numérateur, puisqu'ils sont égaux l'un et l'autre à la différence des deux termes de la fraction qui exprime la première des deux quantités; de plus, le dénominateur de la première de ces deux fractions est plus petit que le dénominateur de la seconde, puisque le dénominateur de la seconde est égal au numérateur de la première.

157. Si on proposait de trouver deux quantités réciproques qui fissent une somme donnée, il faudrait, pour avoir leur différence, retrancher quatre unités du carré de cette somme, et extraire la racine carrée du reste : ayant leur somme et leur différence, rien n'est plus facile d'obtenir chacune d'elles.

Résolution des Équations du quatrième degré.

158. Parmi les différentes méthodes qui ont été données jusqu'à présent pour résoudre les équations du quatrième degré, celle de Ferrari est la plus simple et la plus ingénieuse, et comme elle est aussi la plus ancienne, nous allons commencer par l'exposer.

159. Supposons que l'équation proposée soit

$$x^4 + px^3 + qx + r = 0;$$

si on fait passer les trois derniers termes de cette équation du premier membre dans le second, on aura

$$x^4 = -px^3 - qx - r;$$

si le second membre de cette dernière égalité était un carré parfait, en extrayant la racine carrée de chaque membre, on aurait deux équations rationnelles en x, qui seraient du second degré, et dont les racines satisferaient à l'équation proposée; mais le plus souvent il n'en est pas ainsi : on ajoute alors à chaque membre, non pas le monome qui manque au second membre pour faire un carré parfait, puisque

par là le premier membre cesserait d'en être un, mais un binome tel que $2yx^2 + y^2$, ce qui n'empêche point que le premier membre n'en soit un, et on dispose de l'indétermination de y de manière à faire du second membre un carré exact; lorsque par l'addition de... $2yx^2 + y^2$ on a rendu les deux membres des carrés parfaits, et que l'on tire la racine carrée de chacun d'eux, on obtient deux équations du second degré dont les racines donnent celles du quatrième degré; or si aux deux membres de l'équation

$$x^4 = -px^2 - qx - r,$$

on ajoute $2yx^2 + y^2$, on aura

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = (2y - p)x^2 - qx + (y^2 - r),$$

et il faudra, pour que le second membre soit un carré parfait, que le carré de la moitié du second terme $-qx$ soit égal au produit des deux autres, ce qui exige qu'on ait

$$\frac{q^2}{4} = \{2y - p\} \quad \{y^2 - r\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$y^3 - \frac{p}{2}y^2 - ry - \frac{q^2 - 4pr}{8} = 0.$$

Si on substitue pour y une des racines de cette dernière équation dans la suivante

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = (2y - p)x^2 - qx + (y^2 - r),$$

et qu'on tire la racine carrée de chaque membre, on aura les deux équations

$$x^2 + y = + \left\{ x\sqrt{(2y - p)} - \frac{q}{2\sqrt{(2y - p)}} \right\}$$

$$x^2 + y = - \left\{ x\sqrt{(2y - p)} - \frac{q}{2\sqrt{(2y - p)}} \right\},$$

lesquelles étant résolues, donneront les quatre valeurs de x. Si pour plus de simplicité on représente $\sqrt{(2y - p)}$ par z, les deux équations précédentes se réduiront à

$$x^2 - zx + y + \frac{q}{2z} = 0$$

$$x^2 + zx + y - \frac{q}{2z} = 0.$$

160. Si on détermine les racines de ces deux équations, et que l'on remplace y par sa valeur tirée de l'équation $\sqrt{(2y - p)} = z$, on trouvera que les quatre valeurs de x sont exprimées

par les quatre formules

$$x = \frac{+z + \sqrt{\left\{-z^2 - 2p - \frac{2q}{z}\right\}}}{2}$$

$$x = \frac{+z - \sqrt{\left\{-z^2 - 2p - \frac{2q}{z}\right\}}}{2}$$

$$x = \frac{-z + \sqrt{\left\{-z^2 - 2p + \frac{2q}{z}\right\}}}{2}$$

$$x = \frac{-z - \sqrt{\left\{-z^2 - 2p + \frac{2q}{z}\right\}}}{2},$$

et que l'on peut comprendre toutes dans la suivante

$$x = \frac{\pm z \pm \sqrt{\left\{-z^2 - 2p \mp \frac{2q}{z}\right\}}}{2},$$

en observant que les signes supérieurs de z se correspondent et que les signes inférieurs vont ensemble.

162. On voit par ce qui précède que la recherche d'une équation du quatrième degré est ramenée à trouver celles des racines d'une équation du troisième, c'est à cette dernière qu'on a donné le nom de *réduite*. Si dans cette réduite on substitue pour y sa valeur en z, tirée de l'équation $\sqrt{(2y - p)} = z$, on aura une

équation du sixième degré, qui sera

$$z^6 + 2pz^4 + (p^2 - 4r)z^2 - q^2 = 0,$$

et qu'on abaissera sur-le-champ au troisième en posant $z^2 = u$; cette équation sera

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0,$$

et c'est celle-ci, qui, à proprement parler, est connue sous le nom de *réduite du quatrième degré.*

162. Avant d'aller plus loin, nous observerons que si dans les formules que nous avons trouvées pour x (160), on substitue chacune des valeurs de z, on aura autant de fois quatre valeurs de x, qu'on aura de valeurs de z; et comme celles-ci sont au nombre de six, il paraîtrait s'ensuivre qu'on aurait vingt-quatre valeurs pour x, ce qui ne peut avoir lieu, à moins que les racines provenant de la première substitution, ne rentrent dans celles que fournissent les trois autres, et réciproquement; c'est ce qu'on peut faire voir fort simplement, car si a^2, b^2, c^2 sont les racines de la réduite en u, et que dans les formules de l'article (160), on substitue pour z la quantité a, et pour $2p$ et q leurs valeurs qui sont respectivement égales à $-\{a^2 + b^2 + c^2\}$ et à abc, on trouvera que les quatre valeurs de x qui correspondent à cette

valeur de z, seront représentées par les formules

$$\frac{a+b-c}{2}, \quad \frac{a-b+c}{2}$$
$$\frac{-a+b+c}{2}, \quad \frac{-a-b-c}{2},$$

lesquelles peuvent être mises sous la forme

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\{a+b+c-2c\} \\ \frac{1}{2}\{a+b+c-2b\} \\ \frac{1}{2}\{a+b+c-2a\}. \\ -\frac{1}{2}\{a+b+c\} \end{array}$$

Si au lieu de substituer a pour z, on substituait b, on voit, sans qu'il soit nécessaire de faire aucun calcul, que les quatre valeurs de x seraient les mêmes, puisque cette substitution revient à changer dans l'expression des racines a en b et b en a, et que ce changement n'en produit aucun dans les racines, si ce n'est de faire prendre à la troisième racine la place de la seconde, et réciproquement.

Si dans les mêmes formules on substituait c pour z, on verrait que les résultats seraient les mêmes que si on changeait a en c et c en a dans ceux qu'on a obtenus lorsque pour z on y substituait la quantité a; or ce changement n'en produit aucun dans la grandeur des racines, ainsi que le montre la forme sous laquelle elles ont été mises précédemment.

Quant à la substitution de $-a$, $-b$, $-c$, au lieu de z dans les formules déjà citées, cela revient évidemment à changer z en $-z$ dans ces mêmes formules, et à remplacer la quantité z dans ces dernières, successivement par a, b, c,; or le changement de z en $-z$ n'en apporte aucun dans le système des quatre formules, seulement les deux premières prennent la place des deux dernières, et réciproquement; ainsi les systèmes des résultats des substitutions successives de $-a$, $-b$, $-c$ seront les mêmes que si l'on substituait a, b, c au lieu de z, et comme les systèmes de racines auxquelles conduisent les substitutions de chacune de ces dernières quantités sont les mêmes, il en résulte que la multiplicité des racines provenant de la substitution de celles de l'équation du sixième degré n'est qu'apparente, et que les vingt-quatre valeurs se réduisent réellement à quatre.

163. Si on veut voir à quoi tient la multiplicité des racines de la réduite, il suffit de considérer que l'analyse que nous avons employée pour résoudre l'équation du quatrième degré, revenant à décomposer cette équation en deux facteurs du second degré, qui sont

$$x^2 + zx + y + \frac{q}{2z} \text{ et } x^2 - zx + y - \frac{q}{2z},$$

il faut nécessairement que z ait autant de valeurs qu'on peut faire de facteurs du second degré avec quatre facteurs du premier, ou, ce qui revient au même, autant de valeurs qu'on peut former de sommes différentes avec les quatre racines a, b, c, d en les prenant deux à deux, et comme elles sont au nombre de six, il en résulte que l'équation en z, qui ne doit pas donner plutôt l'une de ces sommes que chacune des autres, doit les donner toutes, et par conséquent monter au sixième degré; mais comme parmi ces sommes, il y en a trois qui sont égales et de signes contraires aux trois autres, puisque la somme des quatre racines est nulle à cause que l'équation est sans second terme, il en résulte que l'équation du sixième degré doit manquer de toutes les puissances impaires de z, et par conséquent s'abaisser au troisième degré, ce qui est confirmé par le calcul.

164. Les racines de l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

étant des fonctions de celles de la réduite, la nature des premières doit dépendre de celles de la seconde; or il peut arriver que les racines de la réduite soient toutes trois réelles, ou que l'une seulement soit réelle et que les deux

autres soient imaginaires, si elles sont réelles il faut qu'elles soient toutes trois positives, ou que l'une d'elles soit positive et les deux autres négatives, puisque le dernier terme $-q^2$ est négatif; si les trois racines sont positives, les racines de la proposée seront toutes quatre réelles et seront exprimées, lorsque q sera positif, par les formules

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\{\, a+b+c-2a \,\}\\ &\tfrac{1}{2}\{\, a+b+c-2b \,\}\\ &\tfrac{1}{2}\{\, a+b+c-2c \,\}\\ -&\tfrac{1}{2}\{\, a+b+c \,\}. \end{aligned}$$

165. Si une des racines de la réduite est positive et que les deux autres soient négatives, les quatre racines de l'équation proposée ne pourront plus être représentées par les formules précédentes, parce que les quantités a, b et c doivent être prises avec des signes qui donnent pour le produit des trois termes dans lesquels chaque racine se décompose, une quantité négative. Si a^2 est la racine positive de la réduite, et que les deux autres soient représentées par b^2 et c^2, les quatre racines seront représentées par

$$-\frac{b+c-a}{2},\quad -\frac{a+c-b}{2}$$
$$-\frac{a+b-c}{2},\quad +\frac{a+b+c}{2}$$

ou, ce qui revient au même, par

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}\{a+b+c-2a\}\\ &-\tfrac{1}{2}\{a+b+c-2b\}\\ &-\tfrac{1}{2}\{a+b+c-2c\}\\ &+\tfrac{1}{2}\{a+b+c\ \ \ \}, \end{aligned}$$

lorsque q sera positif, et elles seront toutes imaginaires, excepté le cas où on aurait $b=c$, dans ce cas la proposée aura deux racines réelles et deux autres racines imaginaires.

166. Si les deux racines b^2 et c^2 étaient en partie réelles et en partie imaginaires, le produit des quantités dans lesquelles chaque racine se décompose étant positif, les quatre racines de la proposée seraient données par les quatre formules de l'article 164, et comme $b+c$ est réel et que les quantités b et c sont imaginaires, il en résulte que dans ce cas la proposée a deux racines réelles et deux racines imaginaires.

Nous disons que $b+c$ est une quantité réelle, et que b et c sont des quantités imaginaires, c'est ce qu'il est facile de faire voir; car a^2 étant une racine réelle de la réduite, les deux autres qui sont b^2 et c^2 seront données par une équation du second degré, par conséquent l'une d'elles étant représentée par

$$m+n\sqrt{-1},$$

l'autre le sera par

$$m - n\sqrt{-1},$$

de sorte que

$$b + c = \sqrt{m + n\sqrt{-1}} + \sqrt{m - n\sqrt{-1}}$$

et

$$b - c = \sqrt{m + n\sqrt{-1}} - \sqrt{m - n\sqrt{-1}};$$

or les seconds membres de ces deux équations sont égaux aux racines carrées des carrés de ces seconds membres, ainsi on aura

$$b + c = \sqrt{2m + 2\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$b - c = \sqrt{2m - 2\sqrt{m^2 + n^2}};$$

mais $2\sqrt{m^2 + n^2}$ est plus grand que $2m$, ainsi $b + c$ est une quantité réelle, et $b - c$ une quantité imaginaire de la forme $k\sqrt{-1}$, d'où il résulte que les quantités b et c sont des quantités imaginaires de la forme $p + q\sqrt{-1}$, et qu'elles ne diffèrent entre elles que par le signe de la partie imaginaire.

167. Si q était négatif, il faudrait combiner les quantités a, b, c avec des signes qui donnent un produit positif, ainsi dans le cas où les racines

cines de la réduite sont toutes positives, ou que deux d'entr'elles sont composées d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, les racines seront données par les formules

$$-\frac{b+c-a}{2},\quad -\frac{a+c-b}{2}$$
$$-\frac{a+b-c}{2},\quad +\frac{a+b+c}{2}.$$

ou, ce qui revient au même, par

$$-\tfrac{1}{2}\{a+b+c-2a\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\{a+b+c-2b\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\{a+b+c-2c\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\{a+b+c\}.$$

168. Si deux des racines de la réduite étaient négatives, les formules précédentes ne conviendraient plus, et il faudrait les remplacer par les suivantes

$$+\frac{b+c-a}{2},\quad +\frac{a+c-b}{2}$$
$$+\frac{a+b-c}{2},\quad -\frac{a+b-c}{2}$$

ou, ce qui revient au même, par

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\{a+b+c-2\alpha\}\\ &\tfrac{1}{2}\{a+b+c-2\beta\}\\ &\tfrac{1}{2}\{a+b+c-2\gamma\}\\ -&\tfrac{1}{2}\{a+b+c\}. \end{aligned}$$

169. Si on compare les formules qui correspondent au cas où q est négatif, avec celles qui conviennent à celui où q est positif, on trouvera que celles qui se rapportent au premier cas sont égales et de signes contraires à celles du second cas; c'est ce qu'il était facile de prévoir : car le changement de q en $-q$ dans l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

est celui qu'il faudrait opérer sur les coefficiens pour faire changer les signes des racines de cette équation.

170. Les racines d'une équation du quatrième degré ne pouvant être toutes quatre réelles, à moins que la réduite n'ait toutes ses racines réelles et positives, il faut, afin que toutes les racines d'une semblable équation soient toutes réelles, que les coefficiens de la réduite aient entr'eux la relation nécessaire pour qu'elle se

trouve dans le cas irréductible, et que les coefficiens de cette équation soient alternativement positifs et négatifs. Or la réduite de l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

étant

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0,$$

il faut, pour qu'elle se trouve dans le cas irréductible, qu'on ait

$$27\left\{\frac{2p^3}{27} - \frac{8pr}{3} + q^2\right\}^2 - 4\left\{\frac{p^2 + 12r}{3}\right\}^3 < 0;$$

c'est ce qu'on trouvera en faisant disparaître le second terme de la réduite, et comparant l'équation qui en résultera avec celle des équations de la même forme que nous avons considérées lorsque nous avons traité des équations du troisième degré : de plus, pour que les termes soient alternativement positifs et négatifs, il faut qu'on ait $p < 0$ et $p^2 - 4r > 0$; réciproquement si toutes ces conditions sont remplies, toutes les racines de la proposée seront réelles; car si la réduite se trouve dans le cas irréductible, et que les termes soient alternativement positifs et négatifs, la réduite aura les trois racines réelles et positives; partant, l'équation du

quatrième degré aura aussi toutes ses racines réelles; mais si l'une de ces conditions vient à manquer, l'équation proposée aura des racines imaginaires, puisque si elle n'en avait point, aucune de ces conditions ne pourrait manquer d'avoir lieu.

171. Si on veut savoir pourquoi les coefficiens de la réduite ont des signes alternativement positifs et négatifs lorsque toutes les racines de la proposée sont réelles, il n'y a rien de plus simple, car les valeurs de z étant les sommes des racines de la proposée prises deux à deux, les valeurs de u sont les carrés de ces sommes; par conséquent les racines de l'équation en u étant toutes trois positives, le coefficient du second terme, qui est la somme des racines prises avec des signes contraires, doit être négatif; le coefficient du troisième terme qui est la somme des produits deux à deux de ces racines, doit être positif; et enfin le dernier terme, qui est le produit de ces racines prises avec des signes contraires, doit être négatif.

172. Nous avons considéré dans ce qui précède, une équation du quatrième degré sans second terme, parce qu'il est toujours possible par une simple transformation, de faire dépendre la

résolution de l'équation complète d'une semblable équation, et parce que cette supposition simplifie les calculs; mais la méthode que nous avons employée peut s'appliquer également aux équations complètes. Pour le faire voir, considérons l'équation

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

si l'on fait passer les trois derniers termes du premier membre dans le second, on aura

$$x^4 + nx^3 = -px^2 - qx - r;$$

si aux deux membres de cette équation on ajoute $\frac{n^2x^2}{4}$, on aura une équation dans laquelle le premier membre sera un carré parfait; si donc le second membre en était un, en extrayant la racine carrée de part et d'autre, on aurait deux équations du second degré, dont les racines satisferaient à l'équation proposée; mais comme il n'arrive pas toujours que l'addition de $\frac{n^2x^2}{4}$ dans l'équation

$$x^4 + nx^3 = -px^2 - qx - r,$$

fasse du second membre un carré parfait, il

faut ajouter à l'équation qui en résulte, une quantité qui sans cesser de rendre le premier membre un carré parfait, puisse faire aussi du second un carré; c'est à quoi on parviendra en ajoutant aux deux membres de l'équation

$$x^4 + nx^3 + \frac{n^2x^2}{4} = \left\{\frac{n^2}{4} - p\right\}x^2 - qx - r,$$

la quantité $2y\left\{x^2 + \frac{nx}{2}\right\}^2 + y^2$; cette addition étant faite, on aura

$$\left\{x^2 + \frac{nx}{2}\right\}^2 + 2y\left\{x^2 + \frac{nx}{2}\right\} + y^2 =$$

$$\left\{2y + \frac{n^2}{4} - p\right\}x^2 + \{ny - p\}x + y^2 - q.$$

Or le premier membre de cette équation est toujours un carré parfait, puisqu'il est le carré de $x^2 + \frac{nx}{2} + y$. Si donc on détermine y de manière que le second membre en soit un, l'équation du quatrième degré pourra se partager en deux du second, et comme le second membre ne peut être un carré, à moins que l'on ait

$$\left\{\frac{ny - p}{2}\right\}^2 = \left\{2y + \frac{n^2}{4} - p\right\}\{y^2 - q\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$y^3 - \frac{p}{2}y^2 + \frac{nq - 4r}{4}y + \frac{(4p - n^2)r - q^2}{8} = c,$$

il en résulte que si on prend la valeur de y dans cette équation que l'on nomme la *réduite*, et que l'on fasse, pour plus de simplicité,

$$z = \sqrt{\left\{2y + \frac{n^2}{4} - p\right\}},$$

on aura

$$\left\{x^2 + \frac{nx}{2} + y\right\}^2 = z^2\left\{x + \frac{ny - p}{2z^2}\right\}^2;$$

si on tire la racine carrée des deux membres de cette équation, on aura les deux suivantes,

$$x^2 + \frac{nx}{2} + y = z\left\{x + \frac{ny - p}{2z^2}\right\}$$

$$x^2 + \frac{nx}{2} + y = -z\left\{x + \frac{ny - p}{2z^2}\right\},$$

ou, ce qui revient au même, les deux que voici

$$x^2 + \left\{\frac{n}{2} - z\right\}x + y - \frac{ny - q}{2z} = 0$$

$$x^2 + \left\{\frac{n}{2} + z\right\}x + y + \frac{ny - q}{2z} = 0;$$

si de chacune de ces deux dernières équations on cherche les racines, on aura celles de l'équation proposée; par conséquent cette dernière équation est égale au produit des deux premières : c'est ce qu'on aurait pu trouver indépendamment de la composition des équations, car dès que la réduite a lieu, on peut mettre l'équation proposée sous la forme

$$\left\{x^2+\frac{nx}{2}+y\right\}^2-z^2\left\{x+\frac{ny-q}{2z^2}\right\}^2=0,$$

c'est-à-dire sous la forme de la différence de deux carrés; et comme à la différence de deux quantités on peut substituer le produit de la somme des racines par la différence de ces mêmes racines, elle sera le produit des deux facteurs

$$x^2+\frac{nx}{2}+y+z\left\{x+\frac{ny-q}{2z}\right\}$$

$$x^2+\frac{nx}{2}+y-z\left\{x-\frac{ny-q}{2z}\right\},$$

ou, ce qui revient au même, le produit de ces deux-ci,

$$x^2+\left\{\frac{n}{2}+z\right\}x+y+\frac{ny-q}{2z},$$

$$x^2+\left\{\frac{n}{2}-z\right\}x+y-\frac{ny-q}{2z}.$$

De l'égalité de chacun de ces facteurs à zéro, on en déduira quatre valeurs de x qui seront les racines de l'équation proposée; ces valeurs de x seront exprimées en fonction de y, de z et des coefficiens de l'équation proposée; mais on pourra les exprimer en fonction des coefficiens et de y seulement, en remplaçant z par sa valeur qui est

$$\sqrt{\left\{2y + \frac{n^2}{4} - p\right\}};$$

sur quoi il est bon d'observer qu'il faut prendre ce radical avec le même signe partout où il se trouvera, sans quoi les formules, au lieu de se rapporter à l'équation

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

se rapporteraient à l'équation

$$x^4 - nx^3 + px^2 - qx + r = 0,$$

ainsi qu'on le peut voir facilement.

173. Si dans chacune des équations

$$x^2 + \left\{\frac{n}{2} + z\right\} x + y + \frac{ny - q}{2z} = 0$$

$$x^2 + \left\{\frac{n}{2} - z\right\} x + y - \frac{ny - q}{2z} = 0,$$

on remplace y par sa valeur tirée de l'équation

$$z = \sqrt{\left\{ 2y + \frac{n^2}{4} - p \right\}},$$

on aura deux équations rationnelles en z, la première de ces équations sera

$$x^4 + \left\{ \frac{n}{2} + z \right\} x + \frac{z^2}{2} + \frac{nz}{4} + \frac{4p - n^2}{8} + \frac{4np - n^3 - 8q}{16z} = 0;$$

la seconde ne différera de celle-ci que par le signe de z.

174. Pour obtenir la valeur de z sans être obligé de recourir à celle de y, on remplacera y dans la réduite par sa valeur tirée de l'équation

$$z = \sqrt{\left\{ 2y + \frac{n^2}{4} - p \right\}},$$

on aura une équation en z qui sera du sixième degré, mais qui s'abaissera sur-le-champ au troisième, parce qu'elle manquera de toutes les puissances impaires de z.

175. Si on veut voir à quoi tient la multiplicité des valeurs de y et de z dans les réduites en y et en z, nous remarquerons que ces réduites

étant exprimées en fonctions des coefficiens de la proposée, il faut, à cause que ces coefficiens sont des fonctions des racines de la proposée, que les racines de la réduite soient aussi des fonctions de celles de la proposée, et que les équations en z et en y donnent pour l'une et pour l'autre de ces quantités, toutes les valeurs dont les fonctions qui les représentent sont susceptibles. Pour obtenir les fonctions des racines qui représentent y et z, nous désignerons les racines de l'équation proposée, par a, b, c, d, et comme deux de ces racines sont comprises dans l'équation

$$x^2 + \left\{\frac{n}{2} + z\right\} x + y + \frac{ny - q}{2z} = 0,$$

et que les deux autres sont données par la suivante,

$$x^2 + \left\{\frac{n}{2} - z\right\} x + y - \frac{ny - q}{2z} = 0,$$

il faut qu'on ait

$$\frac{n}{2} + z = -a - b, \quad y + \frac{ny - q}{2z} = ab$$

$$\frac{n}{2} - z = -c - d, \quad y - \frac{ny - q}{2z} = cd.$$

Si on retranche membre à membre la première

équation de la seconde ligne, et qu'on ajoute aussi membre à membre la seconde équation de la première ligne avec sa correspondante dans la seconde ligne, on aura

$$z = \frac{\{c + d\} - \{a + b\}}{2}, \quad y = \frac{ab + cd}{2}.$$

176. La première équation nous montre que z est égal à la moitié de l'excès de la somme de deux quelconques des racines sur celle des deux autres, et par conséquent qu'elle doit avoir autant de racines qu'on peut former de sommes deux à deux avec quatre quantités; et comme les excès de la demi-somme de deux quelconques des racines sur celle des deux autres sont au nombre de six, il en résulte que l'équation en z, qui ne doit pas donner plutôt l'une de ces fonctions que chacune des autres, doit les donner toutes, et par conséquent monter au sixième degré; mais comme parmi ces fonctions il y en a trois qui sont égales et de signes contraires aux trois autres, l'équation ne doit contenir que des puissances paires de cette quantité.

177. La seconde équation qui donne y en fonc-

tion des racines de la proposée, exprime que chaque valeur de y est égale à la demi-somme faite du produit de deux racines et de celui des deux autres, et comme cette fonction n'est susceptible que de trois combinaisons, il en résulte que l'équation en y qui ne doit pas donner l'une de ces fonctions plutôt que chacune des deux autres, doit les donner toutes, et par conséquent s'élever au troisième degré.

178. La méthode que nous venons d'exposer consiste, dans le cas de l'équation complète comme dans celui où elle est incomplète, à séparer l'équation en deux membres, dans l'un desquels se trouvent tous les termes affectés des puissances de l'inconnue supérieures à la seconde, et à placer dans l'autre membre tous les autres termes; puis à ajouter à chaque membre une quantité qui, sans cesser de rendre le premier membre un carré parfait, soit propre à faire du second membre un carré exact : lorsque cela est fait on tire la racine carrée des deux membres, et l'équation se trouve partagée en deux autres du second degré, qui étant résolues donnent les quatre racines de l'équation.

179. On pourrait aussi faire servir à la détermi-

nation des racines d'une équation du quatrième degré, les connaissances que l'on a acquises sur la nature des fonctions que nous avons désignées par y et par z; car l'équation en z, par exemple, ayant pour racines les moitiés des excès des sommes de deux quelconques des racines sur celle des deux autres, il faut qu'en cherchant l'équation d'où dépend la détermination des excès de la somme de deux quelconques des racines sur celle des deux autres, on tombe sur une équation du sixième degré de la même forme que la réduite, et qui par conséquent soit résoluble à la manière des équations du troisième degré; et comme des racines de cette équation on peut en tirer trois équations linéaires entre les racines de l'équation du quatrième degré, il en résulte qu'en les combinant avec celle qui donne la somme des racines, on pourra en déduire chacune des racines de l'équation proposée.

180. Pour développer ce qui vient d'être dit, considérons l'équation

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

si on représente ses racines par a, b, c, d, et que l'on cherche l'équation d'où dépend la

détermination des fonctions

$$a + b - c - d$$
$$a + c - b - d$$
$$a + d - b - c$$
$$c + d - a - b$$
$$b + d - a - c$$
$$b + c - a - d,$$

il est clair, à cause que ces fonctions sont au nombre de six, que l'équation cherchée montera au sixième degré et qu'elle manquera de toutes les puissances impaires de l'inconnue, puisque parmi ces fonctions il y en a trois qui sont égales et de signes contraires aux trois autres. Si donc on pose le carré de cette inconnue égale à t, elle s'abaissera au troisième degré, et les racines de cette dernière équation seront

$$\{a + b - c - d\}^2$$
$$\{a + c - b - d\}^2$$
$$\{a + d - b - c\}^2;$$

si on désigne ces dernières quantités respectivement par θ, θ', θ'', on aura

$$a + b - c - d = \sqrt{\theta}$$
$$a + c - b - d = \sqrt{\theta'}$$
$$a + d - b - c = \sqrt{\theta''};$$

mais d'un autre côté on a

$$a + b + c + d = -n;$$

si donc à cette dernière équation on ajoute la première, et qu'ensuite on retranche la première de la dernière qui donne la somme des racines, on aura les deux équations

$$a + b = \frac{-n + \sqrt{\theta}}{2}, \quad c + d = \frac{-n - \sqrt{\theta'}}{2};$$

si ensuite on ajoute la seconde équation à la troisième, et que l'on retranche la troisième de la seconde, on aura

$$a - b = \frac{\sqrt{\theta'} + \sqrt{\theta''}}{2}, \quad c - d = \frac{\sqrt{\theta'} - \sqrt{\theta''}}{2};$$

ces équations donnant la différence des racines dont on a les sommes, il sera facile d'en déduire les formules suivantes :

$$a = \frac{-n + \sqrt{\theta} + \sqrt{\theta'} + \sqrt{\theta''}}{4}$$

$$b = \frac{-n + \sqrt{\theta} - \sqrt{\theta'} - \sqrt{\theta''}}{4}$$

$$c = \frac{-n - \sqrt{\theta} + \sqrt{\theta'} - \sqrt{\theta''}}{4}$$

$$d = \frac{-n - \sqrt{\theta} - \sqrt{\theta'} + \sqrt{\theta''}}{4};$$

toute

toute la difficulté consiste donc maintenant à calculer l'équation dont les racines seraient

$$\{a+b-c-d\}^2$$
$$\{a+c-b-d\}^2$$
$$\{a+d-b-c\}^2.$$

181. Pour y arriver facilement, et afin de rendre les calculs moins compliqués, nous supposerons que l'équation du quatrième degré soit sans second terme, et nous représenterons cette équation, comme nous l'avons toujours fait, par

$$x^4+px^2+qx+r=0.$$

Si on désigne par a, b, c, d les racines de cette équation, on aura d'après l'hypothèse que nous venons d'établir, l'équation

$$a+b+c+d=0;$$

mais de cette dernière équation on tire

$$-c-d=a+b$$
$$-b-d=a+c$$
$$-b-c=a+d,$$

par conséquent les racines de l'équation cherchée seront quadruples des carrés des seconds

membres de ces dernières équations. Si donc on désigne par $4z$ l'inconnue de l'équation dont les racines sont

$$\{ a + b - c - d \}^2$$
$$\{ a + c - b - d \}^2$$
$$\{ a + d - b - c \}^2,$$

on aura successivement

$$z = \{a + b\}^2 = -\{a + b\}\{c + d\}$$
$$z = \{a + c\}^2 = -\{a + c\}\{b + d\}$$
$$z = \{a + d\}^2 = -\{a + d\}\{b + c\};$$

mais

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd;$$

d'ailleurs le second membre de cette dernière équation est égal à

$$-p + \{ab + cd\};$$

ainsi la première des équations en z devient

$$z + p = (ab + cd);$$

si on élève les deux membres de cette équation au carré, on aura

$$z^2 + 2pz + p^2 = (ab + cd)^2,$$

mais

$$(ab+cd)^2=(ab-cd)^2+4abcd;$$

d'ailleurs

$$\{ab-cd\}^2=\frac{\{ab-cd\}^2\{a+b\}^2}{\{a+b\}^2}=$$

$$\frac{\{ab(a+b)-cd(a+b)\}^2}{(a+b)^2}=\frac{\{ab(c+d)+cd(a+b)\}^2}{\left\{\frac{a+b-c-d}{2}\right\}^2}=\frac{q^2}{z^2},$$

ainsi on aura, en se rappelant que $abcd=r$, l'équation

$$z^4+2pz^2+p^2=\frac{q^2}{z}+4r,$$

ou

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0;$$

mais comme dans cette équation il ne reste aucune trace qui indique laquelle des trois valeurs de z on a employée pour y arriver, il en résulte que si on opérait sur les deux dernières équations dans lesquelles z entre à la première puissance de la même manière qu'on a opéré sur la première, on retomberait sur la même équation; par conséquent les valeurs de z données par les trois équations du premier degré en z, sont les trois racines de cette équation: si on divise les racines de cette équation par deux et qu'on les représente ainsi divisées par z', z'', z''', les racines de l'équation proposée seront données

par les formules suivantes,

$$\begin{aligned} a &= +\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''} \\ b &= +\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''} \\ c &= -\sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''} \\ d &= -\sqrt{z'} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''} : \end{aligned}$$

il faut observer relativement à ces formules, que chaque radical pouvant être pris tant en plus qu'en moins, il en résulte huit combinaisons de signes qui donnent lieu à huit formules, les quatre premières sont

$$\begin{aligned} &+\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''} \\ &+\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''} \\ &-\sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''} \\ &-\sqrt{z'} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}, \end{aligned}$$

les quatre autres sont

$$\begin{aligned} &-\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''} \\ &-\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''} \\ &+\sqrt{z'} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''} \\ &+\sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}, \end{aligned}$$

dans les unes et dans les autres formules chaque radical pris, abstraction faite du signe dont il est affecté, doit être pris positivement.

182. Pour déterminer les signes des radicaux dans les formules qui se rapportent aux va-

leurs de a, b, c, d, il n'est point nécessaire de savoir le signe que l'on doit donner à chacun d'eux, puisque les expressions qui les représentent, se changent les unes dans les autres lorsque deux radicaux viennent à changer de signes à la fois, il suffit seulement de savoir si ces radicaux doivent être pris, l'un positivement et les deux autres positivement ou négativement, ou bien le premier négativement, et les deux autres positivement ou négativement; ainsi cette question se réduit à trouver le signe que doit avoir le produit des trois radicaux

$$\sqrt{z'},\quad \sqrt{z''},\quad \sqrt{z'''},$$

ou, ce qui revient au même, à trouver le signe du produit de

$$\{a+b\}\{a+c\}\{a+d\},$$

puisque

$$\sqrt{z'}\sqrt{z''}\sqrt{z''}=8\{a+b\}\{a+c\}\{a+d\}:$$

or

$$\{a+b\}\{a+c\}=a\{a+b+c\}+bc;$$

ainsi

$$\{a+b\}.\{a+c\}.\{a+d\}=$$
$$a^3\{a+b+c+d\}+abc+abd+acd+bcd=-q;$$

par conséquent il ne faut admettre que les combinaisons de signes pour lesquels le produit des radicaux est de signe contraire à q, d'où il résulte que le premier système doit être rejeté, et le second admis lorsque q est positif, tandis qu'au contraire le premier doit être admis et le second rejeté lorsque q est négatif, et si dans l'un et l'autre cas la réduite n'a point de racines négatives ; mais si elle en avait, le contraire aurait lieu, car deux radicaux devenant imaginaires, il faudrait, afin que le produit des radicaux soit de signe contraire à q, avoir recours au premier système lorsque q est positif et n'admettre que les formules du second lorsque q est négatif.

183. Pour éviter toute difficulté et toute espèce d'ambiguité il n'y a qu'à substituer à l'un des radicaux sa valeur tirée de l'équation

$$\sqrt{z'}\,\sqrt{z''}\,\sqrt{z'''} = -\frac{q}{8},$$

et on aura pour l'expression de l'une quelconque des racines,

$$x = \sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \frac{q}{8\sqrt{z'}\,\sqrt{z''}};$$

z' et z'', étant deux racines quelconques de la

réduite, et prenant successivement les deux radicaux $\sqrt{z'}$ et $\sqrt{z''}$ en plus et en moins.

184. L'analyse que nous avons employée pour résoudre les équations du troisième degré, en identifiant la proposée avec celle qu'on obtient en élevant au cube une équation du premier, peut servir à former une équation du quatrième degré qui soit comparable avec l'équation générale de ce degré; mais comme pour établir cette comparaison, il faut qu'il y ait autant d'indéterminées qu'il y a d'équations à établir, il faut, à cause que l'équation du quatrième degré a quatre coefficiens arbitraires, que l'équation du premier degré ait un pareil nombre d'indéterminées.

185. Soit donc posée l'équation

$$x = a + b + c + d,$$

si on fait passer d du second membre dans le premier, et qu'ensuite on élève les deux membres au carré, on aura

$$\{x - d\}^2 = \{a^2 + b^2 + c^2\} + 2\{ab + ac + bc\};$$

si dans cette équation on fait passer $a^2 + b^2 + c^2$

du second membre dans le premier, et qu'ensuite on élève les deux membres au carré, on aura

$$\{x-d\}^4-2\{a^2+b^2+c^2\}\{x-d\}^2+\{a+^2b^2+c^2\}^2 = 4\{a^2+b^2+a^2c^2+b^2c^2\}+8abc\{a+b+c\}.$$

Si on remplace $a+b+c$ qui multiplie $8ab$ par sa valeur $x-d$, et qu'on fasse passer tous les termes dans le premier membre, on aura une équation complète du quatrième degré, dont une racine sera connue, et à laquelle on pourra comparer l'équation générale de ce degré; le résultat de cette comparaison fournira autant d'équations que d'indéterminées, et comme aucunes d'elles ne rentrent l'une dans l'autre, elles seront en nombre suffisant pour déterminer quelles sont les fonctions des coefficiens qu'il faut prendre pour a, b, c, d, afin que leur somme satisfasse à l'équation proposée.

186. Si dans l'équation qu'on vient de former, on fait $d=0$, on aura une équation du quatrième degré sans second terme, et dont $a+b+c$ sera une racine, cette équation sera

$$x^4-2\{a^2+b^2+c^2\}x^2-8abcx+\{a^2+b^2+c^2\}^2 -4\{a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2\}=0;$$

si on la compare avec l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

on en déduira les suivantes

$$a^2 + b^2 + c^2 = -\frac{p}{2}$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \frac{p^2 - 4r}{16}$$

$$abc = -\frac{q}{8}.$$

187. La première de ces trois équations donne la somme des carrés des parties dans lesquelles on conçoit que la racine se trouve décomposée, la seconde donne la somme des produits deux à deux des carrés de ces mêmes parties, et de la troisième on peut en déduire le produit des carrés de ces parties, ainsi le carré de chacune d'elles est racine d'une équation du troisième degré dont le coefficient du second terme serait égal à $\frac{p}{2}$, dont le coefficient du troisième terme serait égal à $\frac{p^2 - 4r}{16}$ et dont le dernier terme serait égal à $-\frac{q^2}{64}$. Si donc on désigne l'une quelconque des parties par z, cette équation sera

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}z - \frac{q^2}{64} = 0,$$

et c'est de sa résolution que dépend la connaissance des racines de l'équation du quatrième degré; or le dernier terme de cette équation étant négatif, il faut que l'une des racines soit positive et que les deux autres soient à la fois positives, négatives ou imaginaires, si elles sont positives ou composées d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, et que q soit positif, les racines de la proposée seront données par les formules suivantes

$$a + b - c, \qquad a - b + c,$$
$$-a + b + c, \qquad -a - b - c,$$

puisque le produit des trois parties dans lesquelles se décompose chaque racine, doit être de signe contraire à q, ainsi qu'il résulte de l'équation $abc = -\frac{q}{8}$; mais si deux des racines de la réduite sont négatives, il faudra, à cause que le produit des quantités b et c prises indépendamment d'aucun signe, est négatif, que les quantités soient précédées toutes trois du signe +, ou que deux quelconques d'entre elles soient affectées du signe —; ainsi dans ce cas les formules dont il faudra se servir pour obtenir les racines seront

$$a+b+c, \qquad a-b-c,$$
$$-a+b-c, \qquad -a-b+c;$$

si q était négatif au lieu d'être positif, il faudrait se servir des quatre dernières formules lorsque b^2 et c^2 sont positifs ou imaginaires, et employer les quatre premières lorsque ces mêmes quantités sont négatives.

188. De ces formules il résulte, 1° que les racines d'une équation du quatrième degré sont toutes réelles lorsque les racines de la réduite sont toutes réelles et positives; 2° que les racines de la proposée sont toutes imaginaires lorsque deux des racines de la réduite sont réelles et négatives, à l'exception du cas où ces dernières seraient égales; dans ce cas deux des racines de la proposée sont réelles et égales, et les deux autres sont imaginaires; 3° que deux des racines de la proposée sont réelles et deux imaginaires lorsque deux des racines de la réduite sont imaginaires; 4° enfin qu'il y a autant de racines égales dans la proposée qu'il y en a dans la réduite.

189. Si on voulait obtenir l'expression des racines de l'équation proposée en fonction de deux

quelconques des racines de la réduite, on le pourrait facilement, car de l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 = -\frac{p}{2},$$

on tire

$$b^2 + c^2 = -a^2 - \frac{p}{2};$$

d'ailleurs de l'équation

$$abc = -\frac{q}{8},$$

il en résulte celle-ci

$$2bc = -\frac{q}{4a};$$

si l'on ajoute et que l'on retranche successivement cette dernière équation de celle qui la précède, on aura deux équations qui donneront en extrayant la racine carrée de chaque membre

$$b + c = \sqrt{-a^2 - \frac{p}{2} - \frac{q}{4a}}$$

$$b - c = \sqrt{-a^2 - \frac{p}{2} + \frac{q}{4a}};$$

si on porte ces valeurs de $b + c$ et de $b - c$ dans les formules

$$a \pm \{b - c\}, \quad -a \pm \{b + c\},$$

on aura pour déterminer les quatre racines de l'équation proposée, les formules suivantes

$$x = a \pm \sqrt{\left\{ -a^2 - \frac{p}{2} - \frac{q}{4a} \right\}}$$

$$x = -a \pm \sqrt{\left\{ -a^2 - \frac{p}{2} + \frac{q}{4a} \right\}},$$

lesquelles rentrent dans celles de l'article 160, et qui n'en diffèrent que parce que les valeurs de z qui sont les racines de l'équation

$$z^6 + 2pz^4 + \{ p^2 - 4r \} z^2 - q^2 = 0$$

sont doubles des racines de l'équation

$$z^3 + \frac{p}{2} z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16} z - q^2 = 0.$$

190. Les formules que nous venons de donner sont simples, mais il est un cas qui dans l'application pourrait embarrasser, c'est celui où la quantité a serait nulle, car la quantité q étant aussi nulle, la fraction $\frac{q}{4a}$ qui se trouve sous le radical, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour trouver la valeur de cette fraction, il faut chercher celle de $\frac{bc}{4}$ qui lui est égale, et

recourir pour avoir cette dernière quantité, à l'équation

$$a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 = \frac{p^2 - 4r}{16},$$

qui se réduit, à cause de $a = 0$, à la suivante

$$b^2 c^2 = \frac{p^2 - 4r}{16},$$

d'où l'on en déduit

$$\frac{bc}{4} = \frac{\sqrt{p^2 - 4r}}{16};$$

reportant cette valeur dans les formules données plus haut, on aura les racines de la proposée, comme on peut s'en assurer en résolvant l'équation directement, c'est-à-dire sans avoir recours à aucune équation auxiliaire, ce qui se peut faire, puisque l'équation se trouve être du nombre de celles qui peuvent se résoudre à la manière du second degré.

191. Si dans les équations de l'article (159) on substitue pour y sa valeur tirée de l'équation

$$z = V\{2y - p\},$$

on trouvera que l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

résulte du produit des deux suivantes

$$x^2 - zx + \frac{z^2}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q}{2z} = 0$$

$$x^2 + zx + \frac{z^2}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2z} = 0,$$

en supposant que la quantité z soit déterminée de manière à satisfaire à l'équation

$$z^6 + 2pz^4 + \{p^2 - 4r\}\, z^2 - q^2 = 0.$$

192. Si dans chacun des facteurs dont nous venons de parler, on remplace la quantité z par les racines de la réduite, on aura les six facteurs du second degré, par lesquels l'équation proposée peut être divisée. Mais s'il arrivait que q fût égal à zéro, on trouverait, en ayant égard à ce que nous avons dit dans l'article (190), les deux facteurs du second degré que l'on obtiendrait en résolvant l'équation à la manière ordinaire des équations du second degré; pour avoir les autres il faudrait tirer les valeurs de z^2 de l'équation

$$z^4 + 2pz^2 + p^2 - 4r = 0,$$

et substituer les valeurs positives de z dans les équations données dans le numéro précédent; mais on peut obtenir les quatre autres formules du second degré aussi bien que les deux premières, sans être assujéti à passer

par aucune équation auxiliaire; car si dans l'équation

$$x^4 + px^2 + q = 0,$$

on fait passer px^2 du premier membre dans le second, et qu'on ajoute $\pm 2x^2\sqrt{q}$ aux deux membres de la nouvelle équation, on aura

$$x^4 \pm 2x^2\sqrt{q} + q = x^2 \cdot \{-p \pm 2\sqrt{q}\},$$

d'où l'on tire

$$x^2 \pm \sqrt{q} = \pm x \cdot \sqrt{\{-p \pm 2\sqrt{q}\}} :$$

de cette équation il s'ensuit que la proposée peut résulter, non-seulement du produit des deux facteurs dont nous avons déjà parlé, mais encore du produit des deux que voici

$$x^2 - x\sqrt{\{-p + 2\sqrt{q}\}} + \sqrt{q}$$
$$x^2 + x\sqrt{\{-p + 2\sqrt{q}\}} + \sqrt{q},$$

ou du produit des deux suivans

$$x^2 - x\sqrt{\{-p - 2\sqrt{q}\}} - \sqrt{q}$$
$$x^2 + x\sqrt{\{-p - 2\sqrt{q}\}} - \sqrt{q};$$

s'il arrivait que $p^2 - 4r$ fût négatif, les quatre racines seraient imaginaires, et l'équation proposée ne pourrait résulter que d'une seule manière du produit de deux facteurs réels du second degré; c'est de l'égalité à zéro de chacun de ces derniers facteurs qu'on obtiendra les racines de l'équation du quatrième degré sous la forme $a + b\sqrt{-1}$. Les quantités a et b étant réelles.

Résolution de quelques classes d'équations d'un degré quelconque.

193. La résolution algébrique des équations ayant offert, dès le cinquième degré, une sorte de barrière aux efforts des analystes, ils ont dû chercher si parmi les équations d'un degré supérieur au quatrième, il n'y en aurait pas quelques-unes dont la difficulté serait moindre, ou dont la détermination des racines dépendrait de celles des équations qu'on sait résoudre; c'est aussi ce qu'ils ont fait, et ils sont parvenus à en trouver plusieurs; mais, malgré leurs tentatives, ces sortes d'équations sont si peu nombreuses, qu'il reste encore beaucoup à desirer sur cet objet.

194. Parmi les équations dont on a une solution complète, se trouvent celles qu'on connaît sous le nom d'*équations binomes*, et qui sont ainsi nommées parce qu'elles ne contiennent qu'une seule puissance de l'inconnue et un terme connu; elles sont toutes comprises dans la formule $x^m - a^m = 0$, lorsque le dernier terme est négatif, et dans la formule $x^m + a^m = 0$, lorsque le dernier terme est positif.

195. La méthode que nous allons exposer pour résoudre les équations binomes, repose sur un théorème très-remarquable dans l'analyse; il consiste en ce que la puissance d'un degré quelconque d'une expression de la forme

$$\cos a + \sqrt{-1}.\sin a$$

est une expression semblable à cette dernière et dans laquelle l'arc e[illegible] multiplié par le degré de la puissance. Pc[illegible] démontrer, considérons les deux [illegible]emblables

$$\cos a + \sqrt{-1}.\sin a \quad .. \quad \cos b + \sqrt{-1}.\sin b;$$

si on les multiplie entr'eux, le produit qui en résultera sera égal à

$$\cos\{a+b\} + \sqrt{-1}.\sin\{a+b\},$$

et par conséquent ne différera de l'un ou de l'autre des deux premiers facteurs, que parce qu'au lieu de l'un des arcs il y aura la somme des deux arcs. Si on multiplie ce produit par $\cos c + \sqrt{-1}.\sin c$, celui qui en résultera sera égal au précédent, dans lequel on substituera au lieu de $a+b$, la somme $a+b+c$ des trois arcs, de sorte que les produits des trois facteurs

$\cos a + \sqrt{-1}.\sin a$, $\cos b + \sqrt{-1}.\sin b$, $\cos c + \sqrt{-1}.\sin c$,

sera égal à

$$\cos\{a+b+c\}+\sqrt{-1}.\sin\{a+b+c\},$$

en continuant à raisonner de la même manière, on verra qu'en quelque nombre que soient les facteurs qu'on multiplie, le produit sera toujours égal au cosinus de la somme de tous les arcs, plus le sinus de la somme de tous les arcs multiplié par $\sqrt{-1}$.

196. Si on suppose que tous les arcs soient égaux à a, et qu'ils soient en nombre m, on aura

$$\{\cos a+\sqrt{-1}.\sin a\}^m=\cos ma+\sqrt{-1}.\sin ma,$$

Si on prend le radical en moins, on aura aussi

$$\{\cos a-\sqrt{-1}.\sin a\}^m=\cos ma-\sqrt{-1}.\sin ma;$$

or

$$\{\cos a+\sqrt{-1}.\sin a\}^m\{\cos a-\sqrt{-1}.\sin a\}^m=1;$$

ainsi

$$\{\cos a+\sqrt{-1}.\sin a\}^m=\{\cos a+\sqrt{-1}.\sin a\}^{-m};$$

par conséquent

$$\{\cos a+\sqrt{-1}.\sin a\}^m=\cos ma-\sqrt{-1}.\sin ma.$$

197. La formule que nous venons de démontrer lorsque le nombre m est entier, a encore lieu lorsque le nombre m est fractionnaire, car on a

$$\cos a + \sqrt{-1}.\sin a = \cos n.\frac{a}{n} + \sqrt{-1}.\sin n.\frac{a}{n},$$

or le second membre de cette dernière équation est égal à

$$\left\{\cos\frac{a}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{a}{n}\right\}^n,$$

ainsi on aura

$$\cos a + \sqrt{-1}.\sin a = \left\{\cos\frac{a}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{a}{n}\right\}^n;$$

si on tire la racine $n^{ième}$ de chaque membre, et qu'on élève l'équation qui en résulte à la puissance m, on aura

$$\left\{\cos a + \sqrt{-1}.\sin a\right\}^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{ma}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{ma}{n};$$

ainsi la formule est démontrée pour toutes les valeurs rationnelles positives ou négatives de l'exposant; il ne reste plus qu'à considérer le cas où cet exposant est rationnel. Pour se former une idée nette de ce cas, il faut con-

sidérer l'expression dont il s'agit comme un symbole qui tient lieu de la série qu'on obtient lorsqu'on soumet les grandeurs qui s'y trouvent aux mêmes opérations que si l'exposant était rationnel, ce qui revient à la regarder comme étant la limite vers laquelle tend continuellement la même expression à mesure qu'on prend pour m une suite de grandeurs commensurables qui vont en s'approchant indéfiniment de cette dernière quantité; ainsi la proposition à établir consiste à faire voir que si on développe suivant les lois du binome

$$\{\cos a + \sqrt{-1}\sin a\}^n$$

comme si le nombre n étoit rationnel, le résultat se composera de deux espèces de termes, les uns réels, et les autres imaginaires, de sorte que la somme des premiers sera égale à $\cos ma$, et celle des seconds égale au produit de $\sqrt{-1}$ par $\sin ma$. Pour le démontrer, considérons la série qui résulterait du développement de

$$\{\cos a + \sqrt{-1}.\sin a\}^m,$$

si le nombre m était rationnel. Si on y substitue successivement au lieu de m deux quantités rationnelles $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ l'une plus grande,

l'autre plus petite que le nombre m, on aura deux séries dont les termes correspondans comprendront celui qui occupe le même rang dans la première; par conséquent la somme des termes réels de cette dernière série aura une valeur qui sera toujours comprise entre celle des termes des deux autres séries, quelque rapprochées d'ailleurs que soient les quantités $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$; ainsi elle sera comprise entre $\cos \frac{p}{q} a$ et $\cos \frac{r}{s}$ et comme il ne peut y avoir que $\cos ma$ qui soit toujours compris entre ces deux dernières quantités, la somme des termes réels de la série dont il s'agit est égale à $\cos ma$. On démontrera de la même manière que la somme des termes qui sont multipliés par $\sqrt{-1}$ dans la première série, est égale à $\sqrt{-1} . \sin ma$; par conséquent on aura, quel que soit le nombre m,

$$\{\cos a + \sqrt{-1} . \sin a^m\} = \cos ma + \sqrt{-1} . \sin ma.$$

198. Revenons maintenant à la résolution des équations binomes. Si dans chacune des équations

$$x^m - a^m = 0 \quad \text{et} \quad x^m + a^m = 0,$$

on substitue $a\{\cos \varphi + \sqrt{-1} . \sin \varphi\}$ au lieu de x, les résultats de ces deux substitu-

tions seront respectivement

$$a^m \{ \cos m\varphi + \sqrt{-1}.\sin m\varphi - 1 \}$$
$$a^m \{ \cos m\varphi + \sqrt{-1}.\sin m\varphi + 1 \};$$

par conséquent on satisfera à la première équation, en prenant pour l'arc $m\varphi$ un multiple quelconque de la circonférence, et à la seconde, en prenant pour $m\varphi$ un multiple impair de la demi-circonférence; si donc on désigne par c la circonférence dont le rayon est l'unité, et par k un nombre entier, il faudra, pour que l'expression

$$a \{ \cos \varphi + \sqrt{-1}.\sin \varphi \},$$

soit racine de la première équation, qu'on ait

$$m\varphi = kc \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{kc}{m},$$

et il faudra, pour que la même expression soit racine de la seconde, qu'on ait

$$m\varphi = \frac{kc}{2} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{kc}{2m};$$

ainsi l'expression générale des racines de la première équation est donnée par la formule

$$x = a \left\{ \cos \frac{kc}{m} + \sqrt{-1}.\sin \frac{kc}{m} \right\},$$

et celle des racines de la seconde, par celle-ci

$$x = a\left\{\cos\frac{\{2k+1\}c}{2m} + \sqrt{-1}.\sin\frac{\{2k+1\}c}{2m}\right\}.$$

Si on fait successivement $k=0, k=1, k=2, \ldots$ tant dans la première formule que dans la seconde, on trouvera que les racines de la première équation sont :

$$a.\left\{\cos.\frac{c}{m} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{c}{m}\right\}$$

$$a.\left\{\cos.\frac{2c}{m} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{2c}{m}\right\}$$

$$a.\left\{\cos.\frac{3c}{m} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{3c}{m}\right\}$$

.....

et que celles de la seconde sont :

$$a.\left\{\cos.\frac{c}{2m} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{c}{2m}\right\}$$

$$a.\left\{\cos.\frac{3c}{2m} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{3c}{2m}\right\}$$

$$a.\left\{\cos.\frac{5c}{2m} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{5c}{2m}\right\}$$

.....

de sorte que les racines de l'une et de l'autre peuvent s'exprimer avec les lignes angulaires

qui, dans le cercle dont le rayon est a, correspondent à celles qui, dans ces formules, sont prises dans le cercle dont le rayon est l'unité.

199. Pour construire la partie réelle et la partie qui est affectée de $\sqrt{-1}$, dans l'expression de chacune des racines de la première équation, il faudra, dans le cercle dont le rayon est a, chercher un arc qui soit à la circonférence, comme l'unité est au nombre m, puis porter cet arc successivement sur la circonférence, à partir d'un point quelconque pris pour origine, jusqu'à ce qu'on soit revenu au point d'où l'on est parti, afin d'obtenir les multiples successifs de cet arc; les sinus et les cosinus des angles qui correspondent aux points de division, détermineront respectivement les parties réelles et les coefficiens de $\sqrt{-1}$ dans les racines de la première équation.

200. La construction précédente fait voir que parmi les racines qui résultent de la substitution des nombres 0, 1, 2, 3, ... dans l'expression générale des racines, il n'y en a aucune qui rentre dans les précédentes, tant que l'on n'est point revenu au point d'où l'on est

parti ; car si les arcs qui résultent des différentes hypothèses faites sur k, ont le même cosinus, les sinus sont de signes différens ; et si les arcs ont des sinus égaux, les cosinus sont de signes contraires. La même construction fait voir aussi qu'il est inutile, lorsque m est un nombre entier, de donner à k des valeurs plus grandes que $m-1$, puisque cette supposition ferait revenir sur les mêmes points de division qu'auparavant, et par suite retomber sur les mêmes racines. On voit aussi que les racines qui correspondent à des valeurs de k, dont la somme est $m-1$, ne diffèrent entr'elles que par le signe de la partie imaginaire, puisque les arcs qui correspondent à deux valeurs de k, dont la somme est $m-1$, valent une circonférence, et que de semblables arcs ont le même cosinus et des sinus égaux et de signes contraires ; si donc on affecte chaque radical du double signe, il ne sera point nécessaire de donner à k toutes les valeurs comprises depuis zéro jusqu'à $m-1$, puisqu'on reviendrait sur les mêmes racines, à cause que celles qui sont données par la substitution de la première moitié des nombres $0, 1, 2, \ldots m-1$, ne diffèrent de celles qui sont données par la seconde moitié, que par

le signe de la partie imaginaire; ainsi il suffira de substituer successivement pour k, dans l'expression générale des racines, tous les nombres entiers compris depuis zéro jusqu'à la moitié du nombre m, si ce nombre est pair, et depuis zéro jusqu'à la moitié de $m-1$, si le nombre m est impair, pourvu que dans l'un et l'autre cas, l'on regarde comme simples les racines qui sont données par les valeurs de k qui font disparaître la partie imaginaire; dans le premier cas, c'est-à-dire, lorsque le nombre m est impair, l'équation a deux racines réelles qui sont $+a$ et $-a$, dans le second cas, une seule racine est réelle et égale à $+a$.

201. Si on veut construire en ligne la partie réelle qui entre dans l'expression de chacune des racines de la seconde équation, ainsi que la partie qui est multipliée par $\sqrt{-1}$, dans chacune d'elles, on divisera le cercle dont le rayon est a *fig.* (7) en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le double du degré de l'équation; puis à partir d'un point de division pris pour origine, et en allant dans le même sens, on écrira sur ces points de division les nombres $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$ jusqu'à ce qu'on soit revenu au

point d'où l'on est parti : les cosinus des arcs qui correspondent aux points de divisions qui ont un numéro impair, représentent les parties réelles des racines, et les sinus des mêmes arcs représentent les coefficiens de $\sqrt{-1}$ dans les mêmes racines. La construction précédente fait voir aussi qu'aucunes des racines qui résultent des différentes hypothèses faites sur k, ne rentrent l'une dans l'autre lorsque le nombre k est pris parmi les nombres $0, 1, 2, \ldots\ldots m-1$, puisque tous les arcs qui résultent de cette substitution, sont moindres qu'une circonférence, et que deux arcs moindres qu'une circonférence, ne peuvent avoir à-la-fois le même sinus et le même cosinus; ainsi, aussitôt qu'on substituera pour k des nombres plus grands que $m-1$, on retombera sur les racines qu'on a obtenues par les premières substitutions ; c'est d'ailleurs ce que montre la construction précédente, car aussitôt qu'on substituera pour k des nombres plus grands que $m-1$, on reviendra sur les points de division par lesquels on a déjà passé ; on voit de plus qu'autant il y a de points de division au-dessus du diamètre qui passe par l'origine, autant il y en a au-dessous, puisque si après avoir parcouru toute la circonférence

dans un certain sens, on la parcourt, à partir du même point et avec la même ouverture de compas dans un sens rétrograde, on repasse sur les mêmes points qu'on a parcourus auparavant; et comme ceux qui sont situés au-dessous correspondent, perpendiculairement au diamètre à des points de division situés au-dessus, il en résulte que les racines imaginaires qui correspondent à des arcs dont la somme est égale à une circonférence, ou qui correspondent à des valeurs de k dont la somme est $m-1$, ne diffèrent entre elles que par le signe de la partie imaginaire, de sorte qu'en affectant du double signe $\pm$ le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans l'expression générale des racines, il suffira de substituer successivement au lieu de k les nombres $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ jusqu'à la moitié du nombre m, si m est pair, et jusqu'à la moitié de $m-1$, si m est impair, pour les avoir toutes; mais il faudra ici comme plus haut (200), considérer comme simples les racines qui correspondent aux valeurs de k qui font disparaître la partie imaginaire, puisque le résultat ne correspond plus à deux substitutions différentes; et comme la partie imaginaire ne peut disparaître qu'autant que les sinus des arcs qui correspondent aux nombres substi-

tués pour k sont nuls, et que les sinus ne sont nuls qu'aux extrémités du diamètre, il en résulte que dans le cas de m pair, l'équation ne pourra avoir de racines réelles, et que dans le cas de m impair, elle ne pourra en avoir qu'une seule, laquelle sera égale à $-a$.

202. Cette méthode pour trouver les racines des équations binomes est aussi applicable au cas où l'exposant est irrationnel, et par conséquent à une équation interscendante, telle que..... $x^{\sqrt{3}} - 1 = 0$, quoique par aucune opération géométrique on ne puisse trouver un arc qui soit à la circonférence comme l'unité est à $\sqrt{3}$; mais comme l'arc n'en existe pas moins, et qu'il ne peut être une partie aliquote de la circonférence, ou d'un multiple de la circonférence, il en résulte qu'une semblable équation a une infinité de racines, puisqu'en continuant la division par des circuits continuels, on ne retombera jamais sur les mêmes points de division. Parmi ces racines, aucune n'est assignable en nombres, excepté la première qui est égale à l'unité, toutes les autres sont imaginaires: mais comme on peut parcourir la circonférence en deux sens différens, on voit que les divisions obtenues les unes en allant dans un sens, les

autres en allant dans un sens contraire, doivent correspondre au même point du diamètre qui passe par l'origine, et que cette équation a aussi des racines conjuguées.

203. En raisonnant à peu près de la même manière qu'on vient de le faire, on trouvera lorsque m est irrationnel, que l'équation $x^m + 1 = 0$ a un nombre infini de racines imaginaires conjuguées et inégales, et qu'elle ne peut avoir aucunes racines réelles.

204. Si on multiplie ensemble les facteurs du premier degré qui correspondent aux racines conjuguées

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$a\left\{\cos\frac{kc}{m} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{kc}{m}\right\}$$

$$a\left\{\cos\frac{kc}{m} - \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{kc}{m}\right\}$$

qui appartiennent à l'équation $x^m - a^m = 0$, on aura un trinome qui sera

$$x^2 - 2ax\cos\frac{kc}{m} + a^2,$$

et qui donnera successivement tous les facteurs réels du second degré qui correspondent aux racines conjuguées de cette équation lors-

que pour k on substituera successivement la suite naturelle des nombres 1, 2, 3... jusqu'à $\frac{m-2}{2}$, si le nombre m est pair, et jusqu'à $\frac{m-2}{2}$ si ce même nombre est impair. Si on fait ces substitutions, on trouvera que les facteurs du second degré qui correspondent aux racines conjuguées s

$$x^2 - 2ax\cos\frac{c}{m} + a^2$$

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2c}{m} + a^2$$

$$x^2 - 2ax\cos\frac{3c}{m} + a^2$$

.....

En les multipliant entr'eux et par les facteurs $x - a$ et $x + a$ si m est pair, et par le facteur $x - a$ seulement si m est impair, on aura un produit qui sera égal à $x^m - a^m$.

205. Si dans le trinome $x^2 - 2ax\cos\frac{kc}{m} + a^2$, on avait substitué pour k tous les nombres 0, 1, 2,... jusqu'à $m - 1$, on aurait obtenu une suite de facteurs réels du second degré, parmi lesquels ceux qui correspondent aux racines conjuguées se seraient trouvés deux fois, tandis

dis que les autres ne s'y seraient trouvés qu'une seule fois; et comme ces derniers sont les carrés des facteurs réels du premier degré, il en résulte que $x^m - a^m$ est égal à la racine carrée du produit de tous les trinomes qu'on obtiendrait si dans le premier on substituait successivement pour le nombre k tous ceux qui sont compris dans la suite $0, 1, 2, \ldots m-1$.

206. Du résultat analytique auquel on vient d'être conduit, et de ce que le trinome

$$x^2 - 2ax \cos \frac{kc}{m} + a^2,$$

est égal au carré d'un des côtés d'un triangle dont les deux autres seraient représentés par a et x, et dont l'angle compris par ces derniers serait égal à $\frac{kc}{m}$, il en résulte que si on inscrit dans un cercle dont le rayon est a, un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, puis que l'on prenne un point dans le plan de ce cercle qui soit situé de manière que sa plus courte distance à la circonférence passe par un des sommets du polygone, le produit de toutes les distances de ce point aux sommets du polygone sera égal à la différence de la distance de ce point au centre du cercle et du rayon de ce même cercle

élevés respectivement à une puissance marquée par le nombre des côtés du polygone.

207. Si on multiplie deux à deux les facteurs du premier degré qui correspondent à deux racines conjuguées de l'équation $x^m + a^m = 0$, on aura des produits qui seront de la forme

$$x^2 - 2ax \cos \frac{\{2k+1\}c}{2m} + a^2,$$

et qui résulteront tous de la substitution des nombres 0, 1, 2, 3 jusqu'à $\frac{m-2}{2}$ à la place de k dans ce trinome, si le nombre m est pair, et jusqu'à $\frac{m-3}{2}$ si m est impair. Si on multiplie tous ces facteurs entre eux, lorsque le nombre m est pair, et par le facteur $x+a$ lorsque m est impair, le produit qui en résultera sera égal à $x^m + a^m$.

208. Si dans le même trinome on avait substitué tous les nombres 0, 1, 2... $m-1$, on aurait obtenu deux fois les mêmes trinomes qu'on a obtenus dans l'article précédent, soit que m soit pair ou qu'il soit impair; de plus, comme dans le cas de m impair, l'un de ces trinomes est égal au carré de $x+a$, il en résulte que $x^m + a^m$ est égal

à la racine carrée du produit de tous les facteurs qui proviennent de la substitution dont nous venons de parler.

209. De ce que nous venons de dire, il résulte que si dans un cercle dont le rayon est a, on inscrit un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, puis que d'un point pris dans le plan de ce cercle, et dont la plus courte distance à la circonférence passe par le milieu de l'arc soutendu par un des côtés du polygone, on mène des droites au milieu des arcs soutendus par les différens côtés de ce polygone, le produit de toutes ces droites sera égal à la somme du rayon et de la distance de ce point au centre, élevés chacun à une puissance marquée par le nombre des côtés du polygone. Ce théorème ainsi que celui de l'art. 206, peuvent être compris dans un seul que l'on peut énoncer ainsi.

Si on divise une circonférence dont le rayon est a *en* 2m *parties égales, et que l'on désigne les points de division par* 0, 1, 2, 3, *etc.,* o *répondant à l'origine; puis que d'un point pris sur le rayon qui passe par l'origine ou sur son prolongement considéré du côté de cette origine, on mène des droites à tous les points de division, le produit de*

toutes celles qui seront menées aux nombres impairs, sera égal à la somme des puissances m *du rayon et de la distance de ce point au centre, et le produit de toutes celles qui seront menées de ce même point aux nombres pairs, sera égal à la différence de ces mêmes puissances.*

Ce théorème remarquable est un des plus beaux qu'on ait découverts dans le commencement du dernier siècle; il est connu sous le nom de *théorème de Côtes*, parce que c'est à ce géomètre célèbre qu'on en est redevable.

210. Les racines de l'unité qui proviennent de l'équation $x^m - 1 = 0$ étant données par la formule

$$x = \cos\frac{kc}{m} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{kc}{m},$$

lorsque pour k on y substitue successivement les nombres $0, 1, 2, \ldots m-1$, il en résulte à cause de

$$\cos\frac{kc}{m} + \sin\frac{kc}{m}\,.\sqrt{-1} = \left\{\cos\frac{c}{m} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{c}{m}\right\}^k;$$

que toutes les racines de cette équation sont les puissances successives de la première des

racines imaginaires, c'est-à-dire de celle qui correspond au plus petit arc, de sorte que cette dernière étant trouvée, on peut avoir toutes les autres.

211. Lorsque le nombre m est un nombre premier, il n'est point nécessaire de prendre comme précédemment la première des racines imaginaires pour obtenir toutes les autres, car une quelconque d'entr'elles peut par ses différentes puissances les donner toutes. Pour le faire voir considérons l'expression

$$\cos\frac{rc}{m} + \sqrt{-1}.\sin\frac{rc}{m},$$

qui est propre à représenter une quelconque des racines imaginaires de l'équation $x^m - 1 = 0$. Si on en forme la puissance du degré k, on aura

$$\cos\frac{krc}{m} + \sqrt{-1}.\sin\frac{krc}{m},$$

laquelle sera une racine, quelque soit d'ailleurs le nombre entier qu'on substitue pour k, puisqu'en élevant cette expression à la puissance m on obtient l'unité ; de plus, deux valeurs différentes de k moindres que m ne peuvent

donner le même résultat, puisque si à deux valeurs différentes de k, que nous désignerons par k' et k'', correspondaient les mêmes racines, il faudrait que $k'r$ et $k''r$ étant divisés par m, donnassent le même reste, ce qui exigerait que leur différence $(k' - k'')\,r$ fût un multiple de m, ce qui est impossible, sans quoi il faudrait à cause que le nombre m est premier par rapport à r, que la différence $k' - k''$ fût divisible par m, ce qui ne peut pas avoir lieu, puisque les deux nombres k' et k'' par hypothèse, sont tous deux moindres que m; ainsi on peut à l'aide de l'une quelconque des racines imaginaires de l'équation $x^m - 1 = 0$, obtenir toutes les autres lorsque le nombre m est un nombre premier.

212. Si le nombre m est le produit de plusieurs nombres premiers $\alpha^{\beta}\gamma\ldots$ on peut ramener la détermination des racines de l'équation $x^m - 1 = 0$ à celle des racines d'autant d'équations binomes de la même forme que la précédente, qu'il y a de nombres premiers dans le nombre m, ces équations étant respectivement d'un degré marqué par ces nombres premiers; car si on prend l'expression générale des racines de chacune des équations

$$x^{\alpha} - 1 = 0,\quad x^{\beta} - 1 = 0,\quad x^{\gamma} - 1 = 0\ldots$$

et qu'on les multiplie entr'elles, on aura une expression qui sera de la forme

$$\cos\left\{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots\right\}c+\sqrt{-1}\sin\left\{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}\right\}c$$

et qui satisfera à l'équation proposée quels que soient d'ailleurs les nombres entiers représentés par p, q, r,... Mais si on fait varier ces dernières quantités, savoir : p depuis o jusqu'à α, q depuis o jusqu'à β, r depuis o jusqu'à γ, et ainsi de suite, il sera impossible de trouver deux valeurs de la fonction

$$p\beta\gamma\ldots+q\alpha\gamma\ldots+r\alpha\beta\ldots+\text{etc.},$$

qui étant divisés par m donnent le même reste, puisque si

$$p'\beta\gamma\ldots+q'\alpha\gamma\ldots+r'\alpha\beta\ldots+\text{etc.}$$

et

$$p''\beta\gamma\ldots+q''\alpha\gamma\ldots+r''\alpha\beta\ldots+\text{etc.}$$

étant divisés par m donnaient le même reste, il faudrait que leur différence fût divisible par m, c'est-à-dire qu'on eût

$$\{p'-p''\}\beta\gamma\ldots+\{q'-q''\}\alpha\gamma\ldots+\{r'-r''\}\alpha\beta\ldots+\text{etc.}=Q\alpha\beta\gamma\ldots$$

ce qui ne peut avoir lieu, sans quoi on pour-

rait en déduire que la différence de deux nombres inégaux, et tous deux moindres qu'un nombre donné serait divisible par ce dernier nombre, ce qui est absurde ; par conséquent si on fait varier les quantités p, q, r, ... dans toute l'étendue que nous avons assignée, et de toutes les manières possibles, on aura toutes les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$, d'où l'on voit que pour obtenir facilement toutes les racines de cette dernière équation, il faudra multiplier chacune des racines de l'équation $x^\alpha - 1 = 0$, par chacune des racines de l'équation $x^\beta - 1 = 0$, ce qui donnera $\alpha\beta$ racines ; on multipliera chacune de celles-ci successivement par chacune des racines de l'équation $x^\gamma - 1 = 0$, et on aura de l'équation $x^m + 1 = 0$, un nombre de racines exprimé par $\alpha\beta\gamma$; en continuant ainsi on obtiendra toutes les racines de l'équation proposée.

213. Si l'on considère les racines de l'équation $x^m + 1 = 0$, on trouvera que la première des racines imaginaires étant connue, on pourra obtenir toutes les autres, et qu'il suffira, pour cela, d'élever celle dont nous venons de parler aux puissances impaires marquées par les nombres 1, 3, 5, etc. Mais si le nombre m est

un nombre premier, il ne sera point nécessaire d'avoir précisément la première des racines imaginaires, pour obtenir toutes les racines, parce que, dans ce cas, une quelconque des racines imaginaires peut remplir le même objet, en l'élevant successivement aux puissances impaires 1, 3, 5, etc.; c'est ce qu'on démontrera facilement, en s'appuyant sur l'impossibilité où l'on est de trouver parmi les nombres impairs inférieurs à $2m$, deux nombres qui étant multipliés par un des nombres impairs $1, 3, 5 \ldots 2m-1$, donnent deux produits qui s'accordent à donner le même reste, lorsqu'on les divise par $2m$, ce qui est évident, puisque si le contraire avait lieu, il s'ensuivrait que $(2r+1)(k-k')$ serait divisible par m, lorsque les trois quantités r, k, k' sont respectivement moindres que le nombre m, ce qui est absurde.

214. La facilité avec laquelle on soumet au calcul les expressions de la forme

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi,$$

a suggéré l'idée de ramener à cette dernière expression les quantités de la forme $a+b\sqrt{-1}$, c'est ce qu'on peut toujours faire à l'aide d'une

préparation fort simple qui consiste à multiplier et à diviser cette quantité par une autre qui soit telle que la somme des carrés de la partie réelle et du coefficient de $\sqrt{-1}$ soit égale à l'unité, ce qui exige que le facteur par lequel on multiplie et divise, soit égal à $\sqrt{(a^2+b^2)}$, c'est ce qu'on peut vérifier, car on a

$$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}+\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right\}=a+b\sqrt{-1}.$$

Si on fait

$$\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=\cos\varphi,$$

on aura

$$\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=\sin\varphi,$$

par conséquent, on aura

$$a+b\sqrt{-1}=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}.\ \{\cos\varphi+\sqrt{-1}.\ \sin\varphi\},$$

215. Les équations qui se présentent après les équations binomes, sont celles qui sont de la forme $x^{2m}+px^m+q=0$; si on tire les valeurs de x^m, on aura

$$x^m=\frac{-p\pm\sqrt{(p^2-4r)}}{2},$$

si p^2-4r est positif, les deux valeurs de x^m seront réelles; si on représente l'une d'elles par a^m, et la seconde par a'^m, toutes les racines

de l'équation dont il s'agit seront données par les deux équations

$$x^m - a^m = 0 \quad \text{et} \quad x^m - a'^m = 0.$$

216. Si $p^2 - 4r$ est négatif, les deux valeurs de x^m sont imaginaires ; si on représente l'une d'elles par $a + b\sqrt{-1}$, l'autre sera $a - b\sqrt{-1}$, et les racines de l'équation proposée seront données par les deux équations.

$$x^m = a + b\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad x^m = a - b\sqrt{-1}.$$

Si on fait

$$\frac{a}{\{a^2 + b^2\}^{\frac{1}{2}}} = \cos(\varphi + kc);$$

ces deux équations se transformeront dans les deux suivantes :

$$x^m = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \{\cos(\varphi + kc) + \sqrt{-1}.\sin(\varphi + kc)\}$$
$$x^m = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \{\cos(\varphi + kc) - \sqrt{-1}.\sin(\varphi + kc)\}$$

de la première on tire

$$x = \sqrt[2m]{(a^2+b^2)}.\left\{\cos\left(\frac{\varphi+kc}{m}\right) + \sqrt{-1}.\sin\left(\frac{\varphi+kc}{m}\right)\right\};$$

de la seconde on en déduit

$$x = \sqrt[2m]{(a^2+b^2)}.\left\{\cos\left(\frac{\varphi+kc}{m}\right) - \sqrt{-1}.\sin\left(\frac{\varphi+kc}{m}\right)\right\}$$

ce qui fournit toutes les racines de l'équation proposée.

Démonstration générale de la formule du binome.

217. Nous commencerons par observer que le développement d'une puissance quelconque d'un binome peut se ramener à trouver celui de la même puissance d'un autre binome dont le premier terme est l'unité, et dont le second terme est quelconque, car si le binome est $x+a$, on aura à cause que $x + a = x\left\{1 + \frac{a}{x}\right\}$

$$\{x + a\}^m = x^m \left\{1 + \frac{a}{x}\right\}^m,$$

d'où l'on voit que si l'on trouve le développement de $\left\{1 + \frac{a}{x}\right\}^m$, on aura en multipliant le tout par x^m celui de $\{x + a\}^m$; si on représente $\frac{a}{x}$ par z, le premier terme du développement de $\{1 + z\}^m$ sera l'unité, puisque c'est à cela que se réduit cette fonction quand on y fait $z = 0$, par conséquent ce développement est égal à l'unité, plus une suite de termes affectés de puissances positives de z, puisqu'ils doivent tous disparaître quand on y fait $z=0$; ainsion aura en écrivant les termes dans l'ordre de grandeur des exposans

$$\{1 + z\}^m = 1 + Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + \text{etc.}$$

Cela posé, si on élève les deux membres de

cette équation au carré, on aura

$$\{1+z\}^{2m} = 1 + 2Az^{\alpha} + \text{etc.};$$

or

$$\{1+z\}^{2m} = \{1+2z+z^2\}^m;$$

si donc dans l'expression de $\{1+z\}^m$ on remplace z par $2z+z^2$, on aura aussi le développement de $\{1+z\}^{2m}$, de sorte qu'on aura

$$\{1+z\}^{2m} = 1 + A\{2z+z^2\}^{\alpha} + B\{2z+z^2\}^{\beta} + \text{etc.}$$

Comparant ce résultat avec celui que nous avons obtenu plus haut, on obtiendra

$$1 + 2Az^{\alpha} + \text{etc.} = 1 + A\{2z+z^2\}^{\alpha} + \text{etc.};$$

supprimant l'unité de part et d'autre et divisant les deux membres par z^{α}, il en résultera une équation qui devant se vérifier indépendamment d'aucune valeur particulière de z, aura encore lieu quand on y fera $z = 0$; ce qui donnera l'équation

$$2A = 2^{\alpha}A,$$

et comme dans cette équation A ne peut être nul, puisqu'il faut que dans le développement de $\{1+z\}^m$ il y ait une puissance de z plus faible que toutes les autres, il faudra qu'on ait $2 = 2^{\alpha}$, et par suite $\alpha = 1$, ce qui fait qu'on aura toujours quel que soit m

$$\{1+z\}^m = 1 + Az + \text{etc.}$$

218. Si dans cette équation on fait $m=0$, le premier membre se réduit à l'unité, donc aussi le second membre doit se réduire à son premier terme, et comme cela doit avoir lieu, quel que soit z, il faut que chaque coefficient en particulier soit une telle fonction de m, qu'elle disparaisse quand on y fera $m=0$; ainsi A ne doit contenir que des puissances positives de m, de sorte qu'on aura en écrivant les termes dans l'ordre de grandeur des exposans

$$A = am^p + bm^q + cm^r + \text{etc.};$$

mais lorsque l'exposant m devient $2m$, A qui est le coefficient de la première puissance de z dans $\{1+z\}^m$ se change en $2A$; si donc on désigne par A' le coefficient de la première puissance de z dans $\{1+z\}^{2m}$, on aura

$$A' = 2am^p + 2bm^q + 2cm^r + \text{etc.},$$

et comme ce coefficient s'obtient aussi en substituant $2m$ au lieu de m dans A, on aura

$$A' = 2^p am^p + 2^q bm^q + 2^r cm^r + \text{etc.}$$

Comparant les deux valeurs de A', on en dé-

duira les équations suivantes,

$$2a = 2^p a, \quad 2b = 2^q b, \quad 2c = 2^r c, \text{ etc.} :$$

la première peut être satisfaite de deux manières, d'abord en faisant $a = 0$ ou $p = 1$, et comme a ne peut être nul, puisqu'il est le coefficient de la plus faible puissance de m dans A, il faut qu'on ait $p = 1$; quant aux équations qui suivent la première, il est évident, à cause que p est plus petit que q, r, s, etc., qu'elles ne peuvent être satisfaites qu'autant qu'on aura à la fois $b = 0$, $c = 0$, etc., de sorte qu'on aura $A = am$: il reste à déterminer a; mais comme cette quantité est indépendante de m et qu'elle doit rester la même quelque soit m, si on la détermine pour une valeur particulière de m, elle sera déterminée pour toutes; or si on porte la valeur de A dans la série qui exprime le développement de $\{1 + z\}^m$ on aura

$$\{1 + z\}^m = 1 + amz + \text{etc.};$$

si dans cette équation on fait $m = 1$, il en résultera $a = 1$; donc pour toute autre valeur de m on aura aussi $a = 1$, et par suite $A = m$, de sorte que pour toutes les valeurs de m on

aura

$$\{1 + z\}^m = 1 + mz + \text{etc.};$$

si dans cette équation on substitue $\frac{a}{x}$ au lieu de z, et que l'on multiplie les deux membres par x^m, on trouvera que les deux premiers termes du développement de $(x + a)^m$ sont $x^m + mx^{m-1}a$, par conséquent le coefficient de a dans le second terme s'obtiendra en multipliant le premier par l'exposant de x, et diminuant l'exposant d'une unité : c'est à ce coefficient qu'on a donné le nom de fonction prime ou de fonction dérivée de la fonction x^m. Ainsi *la fonction prime d'une puissance est le coefficient du terme affecté de la première puissance de l'accroissement qu'on suppose à la variable qu'elle renferme, et elle est égale au produit de l'exposant de cette puissance par la puissance d'un degré moindre d'une unité de la même variable.*

219. Cela posé, reprenons la série

$$\{1 + z\}^m = 1 + mz + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \text{etc.},$$

si partout où se trouve z on substitue $z+i$, on aura

$$\{1+z+i\}^m = 1 + m\{z+i\} + B\{z+i\}^\beta + C\{z+i\}^\gamma + \text{etc.}$$

ainsi,

ainsi, si on développait les opérations qui sont indiquées, le coefficient de la première puissance de i dans le second membre, serait le même que le terme affecté de la première puissance de i dans le premier membre. Or, si dans le premier membre on regarde $1 + z$ comme ne formant qu'une quantité, il faudra, en vertu de ce que nous avons fait voir précédemment, que le coefficient de la première puissance de i soit $m\{1+z\}^{m-1}$, et comme le coefficient de la première puissance de i dans chacun des termes du second membre s'obtient en multipliant le premier terme du développement de chacun d'eux par l'exposant de la puissance, et diminuant l'exposant d'une unité, on aura

$$m\{1+z\}^{m-1} = m + \beta B z^{\beta-1} + \gamma C z^{\gamma-1} + \text{etc.};$$

si on multiplie les deux membres de cette équation par $1 + z$, puis que l'on remplace $\{1+z\}^m$ par la série qui en tient lieu, et qu'ensuite on fasse passer le produit du second membre par z, du second membre dans le premier, on aura

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} m + m^2 & z + mB & z^2 + mC & z^3 + mD & z^4 + \text{etc.} = \\ \quad - m & \quad - \beta B & \quad - \gamma C & \quad - \delta D & \end{array}$$

$$m + \beta B z^{\beta-1} + \gamma C z^{\gamma-1} + \delta D z^{\delta-1} + \text{etc.}$$

cette équation devant se vérifier indépendamment de toutes valeurs particulières de z, il faut que les termes qui occupent les mêmes rangs dans chaque membre soient identiques; ainsi on aura entre les exposans et les coefficiens les relations suivantes, savoir :

Entre les exposans,	Entre les coefficiens,
$\beta - 1 = 1$	$m = m$
$\gamma - 1 = \beta$	$\beta B = m.m - 1$
$\delta - 1 = \gamma$	$\gamma C = \{m - \beta\}B$
$\varepsilon - 1 = \delta$	$\delta D = \{m - \gamma\}C$
.....	.....

Des équations qui établissent les relations entre les exposans, on tire $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$, et ainsi de suite ; si on porte ces valeurs dans les équations qui déterminent les coefficiens, on en tirera

$$B = \frac{m.m - 1}{2}$$

$$C = \frac{m.m - 1.m - 2}{2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{m.m - 1.m - 2.m - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Si on substitue pour les exposans et les coef-

ns que nous venons de trouver leurs valeurs
l'expression qui donne le développement
$1 + z$ ^{m}, on aura

$$\}^m = 1 + mz + \frac{m.m-1}{2}z^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}z^3 + \text{etc.}$$

n remplace z par $\frac{a}{x}$ et qu'on multiplie les
t membres après cette substitution par
on aura

$$\}^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}a^2x^{m-2} + \text{etc.},$$

ui est la formule qu'il fallait démontrer,
ui convient à tous les cas, puisque les rai-
nemens qui établissent la marche du calcul
t tout-à-fait indépendans de la nature et
a grandeur de l'exposant.

o. Avant de passer à autre chose, il est bon
server que la démonstration précédente
rrait se simplifier si on ne considérait que
as où l'exposant est rationnel; car il est
s la nature des puissances entières ou frac-
naires de $1 + z$ de se développer en séries
onnées par rapport aux puissances entières
ositives de z, ce qu'on peut vérifier tant
r l'élévation aux puissances entières posi-

tives ou négatives, que pour l'extraction des racines, et par suite, pour toutes les puissances fractionnaires de la même quantité, ainsi on pourrait l'abréger de tout ce qui a rapport à la détermination des exposans; de plus on peut, sans recourir à la méthode que nous avons suivie, démontrer fort simplement que le coefficient numérique du second terme du développement est égal à l'exposant de la puissance; car on a

$$\frac{\{1+z\}^{\frac{m}{n}}-1}{z}=A+Bz+\text{etc.}$$

or

$$\frac{\{1+z\}^{\frac{m}{n}}-1}{z}=\frac{\{1+z\}^{\frac{m}{n}}-1}{\{1+z\}-1}.$$

Si on divise le numérateur et le dénominateur de la fraction qui exprime le second membre de cette dernière équation par $\{1+z\}^{\frac{1}{n}}-1$; on trouvera qu'elle est égale à

$$\frac{\{1+z\}^{\frac{m-1}{n}}+\{1+z\}^{\frac{m-2}{n}}+\ldots+\{1+z\}^{\frac{1}{n}}+1}{\{1+z\}^{\frac{n-1}{n}}+\{1+z\}^{\frac{n-2}{n}}+\ldots+\{1+z\}^{\frac{1}{n}}+1}$$

et comme cette fraction est égale à A+Bz+etc.,

quelle que soit la valeur de z, il faut que la partie qui dans cette fraction est indépendante de cette quantité soit la valeur de A, or on l'obtiendra en y faisant $z = 0$, et comme cette supposition réduit le numérateur à m et le dénominateur à n, on aura $A = \frac{m}{n}$; après cela il n'y a rien de plus simple que de continuer la démonstration en suivant la marche que nous avons tracée plus haut : lorsqu'on a ainsi démontré la formule du binome pour le cas de l'exposant rationnel, on peut l'étendre facilement au cas où il est irrationnel, par les raisonnemens connus, et dont on a, dans la géométrie surtout, un si grand nombre d'exemples.

221. Si au lieu de représenter le développement de $\{1 + z\}^m$ par $1 + Az^\alpha + Bz^\beta + \text{etc.}$, comme on l'a fait ci-dessus (217), on l'avait représenté par $P + Az^\alpha + Bz^\beta + \text{etc.}$, on aurait trouvé en se servant des mêmes moyens que ceux dont nous avons fait usage, que les coefficiens A, B, C,... sont les mêmes que ceux que nous avons trouvés dans le premier cas, à cela près que tous les coefficiens sont multipliés par P. Or si dans l'équation

$$\{1 + z\}^m = P + Az^\alpha + \text{etc.},$$

on fait

$$z = 0, \quad \text{on a} \quad P = 1^m,$$

d'ailleurs,

$$1^m = \{\cos kc + \sqrt{-1}.\sin kc\}^m = \cos kmc + \sqrt{-1}.\sin kmc,$$

ainsi

$$P = \cos kmc + \sqrt{-1}.\sin kmc,$$

ce qui fait qu'on a, quel que soit m,

$$\{1 + z\}^m = \{\cos kmc + \sqrt{-1}.\sin kmc\} \times \left\{1 + mz + \frac{m.m-1}{2} z^2 + \text{etc.}\right\},$$

si dans cette formule on fait $k = 0$, on a

$$\{1 + z\}^m = 1 + mz + \frac{m.m-1}{2} z^2 + \text{etc.};$$

ainsi ce qui faisait que cette formule n'avait pas toute la généralité requise, c'est qu'on ne donnait pas au développement toute la généralité dont il est susceptible, et que cette forme ne convenait qu'à la première des valeurs de $\{1+z\}^m$.

Du développement en séries des exponentielles et des logarithmes.

222. La fonction a^x dans laquelle a est une constante autre que l'unité et x une variable, offre dans les différens états de grandeur par lesquels elle passe, l'expression de tous les nombres compris depuis zéro jusqu'à l'infini, lorsqu'on fait passer la variable x par tous les états intermédiaires entre l'infini négatif et l'infini positif : cette manière de concevoir la génération des quantités est une des plus importantes découvertes qu'on ait faites dans le dernier siècle, et une de celles qui ont le plus contribué à étendre le domaine de l'analyse et à multiplier ses ressources. Comme les propriétés fondamentales de ce genre de calcul sont développées dans la plupart des traités élémentaires, nous ne nous y arrêterons point. Dans ce qui va suivre, nous nous occuperons du développement de cette fonction ordonnée par rapport aux puissances successives de la variable x, ou, ce qui revient au même, à donner l'expression d'un nombre par son logarithme; après quoi nous nous occuperons de la question inverse, c'est-à-dire de la détermination du logarithme en fonction du nombre.

223. Considérons d'abord la fonction a^x et proposons-nous de la développer par rapport aux puissances croissantes de x : pour reconnaître la forme du développement de cette fonction, nous ferons $a = 1 + b$, par ce moyen nous aurons

$$a^x = (1+b)^x = 1 + xb + \frac{x.x-1}{2}b^2 + \frac{x.x-1.x-2}{2.3}b^3 + \frac{x.x-1}{2.}\cdot\frac{x-3}{}b^4 + \text{etc.}$$

Si dans ce résultat on effectuait les opérations indiquées et qu'on réunît les termes affectés des mêmes puissances de la variable, on aurait le développement cherché; mais ce ne serait pas d'obtenir les termes successifs du développement, que de reconnaître la loi suivant laquelle les coefficiens dépendent les uns des autres, et que le procédé de la multiplication ne suffirait pas pour bien l'établir, nous allons faire connaître la marche qu'il convient de suivre pour y arriver.

224. Si on représente par A, B, C, D... les coefficiens des puissances successives de x dans le développement de a^x, nous aurons

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$$

Si dans cette égalité on change x en $x+i$, on aura

$$a^{x+i}=1+A(x+i)+B(x+i)^2+C(x+i)^3+D(x+i)^4+\text{etc.}$$

Mais $a^{x+i}=a^x.a^i$. Si donc on multiplie le développement de a^x par celui de a^i, on aura un résultat qui sera identiquement le même que celui de la première substitution; par conséquent le coefficient de la première puissance de i dans le développement de a^{x+i} sera identique avec celui qui résulterait du produit de a^x par a^i. Or le coefficient du terme affecté de la première puissance de i dans le résultat de la première substitution, s'obtiendra en multipliant chacun des termes du développement de a^x par l'exposant de x dans chacun d'eux, et diminuant l'exposant d'une unité, ainsi il sera égal à

$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\text{etc.}$$

D'un autre côté, le coefficient du terme affecté de la première puissance de i dans le produit de a^x par a^i, résulte évidemment du produit de a^x par le coefficient du terme affecté de la première puissance de i dans a^i. Or le développement de a^x étant $1+Ax+$ etc., celui de a^i sera $1+Ai+$ etc.; ainsi le coefficient de la

première puissance de z dans a^x. a^l sera Aa^x ou, ce qui revient au même,

$$A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + ADx^4 + \text{etc.}$$

Puisqu'on a

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.},$$

on aura donc

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots =$$
$$A + A^2x + ABx^2 + \ldots x^3 + ADx^4 + \text{etc.}$$

Cette [illegible]t avoir lieu indépendamm[illegible]rs particulières de x, à moins [illegible]s des mêmes puissances de cette variable ne soient égaux, il faudra qu'on ait les équations suivantes

$$A = A$$
$$2B = A^2$$
$$3C = AB$$
$$4D = AC.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

La première de ces égalités ne renferme aucune contradiction et se vérifie d'elle-même ; des

autres on en déduit successivement,

$$B=\frac{A^2}{2}$$

$$C=\frac{A^3}{2.3}$$

$$D=\frac{A^4}{2.3.4}.$$

.....

Substituant pour B, C, D, etc., les valeurs qu'on vient de trouver dans la première série, on aura

$$a^x=1+Ax+\frac{A^2x^2}{2}+\frac{A^3x^3}{2.3}+\frac{A^4x^4}{2.3.4}+\text{etc.}$$

225. Pour déterminer la quantité A, reprénons le développement de a^x sous la forme où nous l'avons considéré en substituant $1+b$ au lieu de a dans a^x, par cette substitution nous avons vu qu'on avait

$$a^x=1+xb+\frac{x.x-1}{2}b^2+\frac{x.x-1.x-2}{2.3}b^3$$
$$+\frac{x.x-1.x-2.x-3}{2.3.4}b^4+\text{etc.}$$

Le premier résultat ne devant différer de celui-ci que par la forme, il en résulte que si dans ce dernier on effectuait les opérations indiquées,

on retomberait sur un résultat parfaitement identique avec le premier, par conséquent le coefficient de la première puissance de x dans le second développement, sera le même que celui de la même puissance de cette variable dans le premier: mais tous les termes de ce développement, excepté le premier, étant multipliés par x, il en résulte que si on y supprime ce facteur et qu'on prenne dans le résultat le terme indépend[illegible]c, on aura précisément la quantité cher[illegible], la suppression de ce facteur étant faite, on a:

$$b+\frac{x-1}{2}b^2+\frac{x-1.x-2}{2.3}b^3+\frac{x-1.x-2.x-3}{2.3.4}b^4+\text{etc.}$$

Pour avoir dans ce résultat le terme indépendant de x, il suffit de faire $x=0$; cette supposition étant faite, on a

$$A=b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{etc.},$$

ou en substituant pour b sa valeur $a-1$,

$$A=(a-1)-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3-\tfrac{1}{4}(a-1)^4+\text{etc.}$$

226. La série que nous venons de trouver pour A

n'est convergente qu'autant que $a-1$ ne surpasse pas l'unité, ou que a n'est pas plus grand que 2; ainsi cette série ne peut être employée pour donner la valeur de A lorsque a surpassera cette limite; mais on peut en trouver une autre qui converge pour des valeurs de a, plus grande que 2; en effet, si dans la série

$$(a-1)-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3-\tfrac{1}{4}(a-1)^4+\text{etc.}$$

on met $\frac{1}{a}$ au lieu de a, on aura:

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-1\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-1\right)^3-\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-1\right)^4+\text{etc.}$$

et cette quantité se rapportera à la valeur de A, quand la base au lieu d'être a sera égale à $\frac{1}{a}$, mais alors a^s se changera en a^{-s} et A en $-A$; ainsi on aura

$$-A=\left(\frac{1-a}{a}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-a}{a}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1-a}{a}\right)^3-\tfrac{1}{4}\left(\frac{1-a}{a}\right)^4+\text{etc.}$$

mais si l'on observe que $\frac{1}{a}-1=-\left(\frac{a-1}{a}\right)$, et que toute puissance impaire de $-\left(\frac{a-1}{a}\right)$ donne moins, on aura, après avoir changé tous les

signes

$$A=\left(\frac{a-1}{a}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{a-1}{a}\right)^4+\text{etc.}$$

c'est à quoi on pouvait arriver immédiatement, car on a

$$a^x=(1+b)^x=\left(\frac{1}{1+b}\right)^{-x}=\left(1-\frac{b}{1+b}\right)^{-x}=1+x\frac{b}{1+b}$$

$$+x\,\frac{x+1}{2}\left(\frac{b}{1+b}\right)^2+x\,\frac{x+1}{2}\,\frac{x+2}{3}\left(\frac{b}{1+b}\right)^3+\text{etc.}$$

Si on divise par x tous les termes qui suivent le premier, on aura

$$\frac{b}{1+b}+\frac{x+1}{2}\left(\frac{b}{1+b}\right)^2+\frac{x+1}{2}\,\frac{x+2}{3}\left(\frac{b}{1+b}\right)^3$$

$$+\frac{x+1}{2}\,\frac{x+2}{3}\,\frac{x+3}{4}\left(\frac{b}{1+b}\right)^4+\text{etc.}$$

Si dans ce résultat on prend le terme indépendant de x, on aura la valeur de A ; or on l'obtiendra comme plus haut en y faisant $x=0$, ainsi on aura

$$A=\frac{b}{1+b}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{1+b}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{1+b}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{1+b}\right)^4+\text{etc.}$$

ou en mettant pour b sa valeur $a-1$,

$$A=\frac{a-1}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{a-1}{a}\right)^4+\text{etc.}$$

comme ci-dessus.

227. On peut obtenir pour l'expression de la quantité A une formule dans laquelle sont comprises comme cas particuliers, celles que nous venons de donner; pour cela, nous observerons qu'on a toujours, quel que soit p,

$$a^{\frac{s}{p}}=\{\ a^p\ \}^{\frac{s}{p}};$$

si on représente a^p par $1+b$, on aura

$$a^{\frac{s}{p}}=\{\ 1+b\ \}^{\frac{s}{p}},$$

développant le second membre par la formule du binome, on trouvera que le coefficient de la première puissance de x dans le second membre, est

$$\frac{1}{p}\left\{\ b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{etc.}\ \right\},$$

et comme le coefficient de cette même puissance de x dans le premier membre est représenté par A, on aura après avoir substitué

pour b dans l'expression précédente sa valeur tirée de l'équation $1 + b = a^p$

$$A = \frac{1}{p}\left\{(a^p - 1) - \tfrac{1}{2}(a^p - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(a^p - 1)^3 - \text{etc.}\right\}$$

Comme la quantité p est absolument arbitraire, on peut toujours faire ensorte qu'elle soit prise de manière à rendre cette formule aussi convergente qu'on le voudra; si on fait $p = 1$, on aura

$$A = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 + \text{etc.},$$

qui est la formule que nous avons obtenue plus haut [225], si on y fait $p = -1$, on aura

$$A = \frac{a-1}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \text{etc.}$$

ce qui est précisément celle qui a été donnée [226].

228. Avant d'aller plus loin, il convient de remarquer que la série obtenue précédemment pour a^x, finira toujours par être convergente, car les termes qui la composent commenceront à décroître aussitôt que le facteur $\frac{Ax}{n}$ par lequel on multiplie le terme du rang n pour avoir le suivant, sera plus petit que l'unité, ce qui arrivera nécessairement aussitôt que le nombre

n sera plus grand que Ax; et comme lorsque cela aura lieu, le décroissement des termes se fera plus rapidement que celui des termes d'une progression géométrique décroissante; on peut être assuré que plus on prendra de termes, plus on approchera de la vraie valeur de la fonction, et que l'erreur qu'on commettra sera moindre que la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme serait égal à celui qui suit immédiatement le dernier terme de ceux auxquels on s'arrête dans la série, et dont la raison serait le rapport de ces deux termes; et comme cette progression va toujours en diminuant à mesure qu'on prend un plus grand nombre de termes de la série, et qu'elle peut devenir aussi petite qu'on le voudra, il s'ensuit que cette série converge vers la véritable valeur de la fonction dont elle est le développement. On voit de plus que l'erreur qu'on commettra en ne comptant qu'un certain nombre de termes, sera moindre que la somme des termes de la progression, et qu'on pourra estimer, au moyen des diverses progressions, le degré d'approximation auquel on est arrivé.

229. La quantité A qui est donnée par l'une

ou l'autre des équations précédentes, dépend comme on voit de a, ainsi comme elle varie avec elle, et qu'elle se mesure en quelque sorte sur la base a, on lui a donné le nom de *module*.

230. Si dans la formule qui donne le développement en série de a^x, on substitue $\frac{x}{A}$ au lieu de x, on aura

$$a^{\frac{x}{A}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

Or, $a^{\frac{x}{A}} = (a^{\frac{1}{A}})^x$. Si donc on pose $a^{\frac{1}{A}} = e$ on aura

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Par conséquent il existe une valeur de la base pour laquelle le module est égal à l'unité ; si on veut en avoir la valeur, il faut faire dans la série précédente $x = 1$, et on aura

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

$$= 2,7182818284590 45....$$

de la relation $a^{\frac{1}{A}} = e$ on tire $a = e^A$, si on prend les logarithmes des deux membres de

cette équation dans le système dont la base est e, on aura log. $a = A$, c'est-à-dire que le module d'une exponentielle est égal au logarithme de la base de cette exponentielle pris dans le système dont la base est e.

231. De la valeur que nous venons de trouver pour A, et de ce qui a été dit à l'article 224 il en résulte que si dans la fonction a^x on substitue $x + i$ au lieu de x, le coefficient de la première puissance de i est égal à a^x log. a; et comme le terme affecté de la première puissance de i se désigne sous le nom de fonction prime, il en résulte, que *la fonction prime d'une exponentielle est égale à cette exponentielle multipliée par le logarithme de la base de cette exponentielle, pris dans le système dont la base est* e.

232. Après avoir trouvé une valeur approchée du nombre e, il est bon de le considérer en lui-même, et de faire voir que non-seulement il est compris entre 2 et 3, mais qu'aucune fraction rationnelle comprise entre ces deux nombres ne peut le représenter; d'abord il est plus grand que 2, puisque les deux premiers termes de la série

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.},$$

sont égaux l'un et l'autre à l'unité, et que la somme des autres termes est positive, mais comme cette somme est moindre que celle des termes de la suite

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \text{etc.},$$

qui est égale à l'unité, puisqu'elle résulte de la division de 1 par $2 - 1$, il s'ensuit que la somme des fractions

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.},$$

est nécessairement moindre que l'unité, et par suite, que le nombre e est moindre que 3.

Je dis en second lieu, qu'aucune fraction rationnelle ne peut le représenter, car si une fraction irréductible $\frac{m}{n}$ lui était égale, on aurait

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \ldots \frac{1}{2..n} + \frac{1}{2..n.n+1} + \text{etc.};$$

mais si on multiplie les deux membres de cette équation par le produit $1.2..n$ de la suite naturelle des nombres, jusqu'à celui qui indique le dénominateur de la fraction qui se trouve dans le premier membre, on aura

$\{1.2...n-1\}\, m =$ un nombre entier +

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1.n+2}+\frac{1}{n+1.n+2.n+3}+\text{etc.},$$

or

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1.n+2}+\frac{1}{n+1.n+2.n+3}+\text{etc.}$$

est plus petit que

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\text{etc.},$$

et comme cette dernière quantité est égale à $\frac{1}{(n+1)-1}$, et que le premier membre est un nombre entier, il s'ensuivrait que si à un nombre entier on ajoutait une fraction moindre que $\frac{1}{n}$, le résultat serait un nombre entier, ce qui est absurde; donc il est également absurde de supposer que le nombre e soit rationnel, donc il est irrationnel.

N. B. Cette démonstration m'a été communiquée par M. Poinsot, qui m'a dit la tenir de M. Fourier.

233. Si dans l'équation

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

on change x en $-x$, on aura pour e^{-x} un

résultat qui ne différera du précédent que par les signes des termes affectés des puissances impaires de x; si donc on l'ajoute au premier, les puissances impaires de x se détruiront, et le résultat sera égal au double des termes de rangs impairs, ou, ce qui revient au même, au double des termes affectés des puissances paires de x; on aura donc

$$e^x + e^{-x} = 2\left\{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right\}$$

Si au lieu d'ajouter le développement de e^{-x} à celui de e^x, on le retranchait, les termes affectés des puissances paires de x se détruiraient, et les autres se doubleraient, de sorte qu'on aurait

$$e^x - e^{-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \text{etc.}\right\}$$

234. Si on voulait calculer avec des nombres la valeur de e^x, l'une ou l'autre des deux formules précédentes pourrait être employée et servirait à abréger considérablement le calcul numérique, puisque, sans rien perdre de l'exactitude à laquelle on aspire, on peut abréger l'opération de près de moitié; car si on s'arrête à un terme quelconque de l'une ou de l'autre expression, on calcule deux fois moins de termes que si on avait recours à la série qui donne immédia-

tement la valeur de e^x ; si on désigne par 2A le second membre du résultat de $e^x + e^{-x}$, on aura pour déterminer e^x, l'équation

$$e^{2x} - 2Ae^x + 1 = 0,$$

de laquelle on deduit

$$e^x = A + \sqrt{\{A^2 - 1\}};$$

ainsi on aura la valeur de e^x d'autant plus exactement, que la valeur de A sera plus approchée, c'est-à-dire qu'on aura employé un plus grand nombre de termes pour déterminer cette quantité : si on prend le radical en — on aura la valeur de e^{-x}.

235. On pourrait encore se servir des tables des sinus et des cosinus pour y arriver plus rapidement, car si à l'équation

$$e^x + e^{-x} = 2\left\{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right\},$$

on ajoute la suivante

$$2\cos x = 2\left\{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.3} + \text{etc.}\right\},$$

on aura

$$e^x + e^{-x} + 2\cos x = 2\left\{1 + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^8}{2..8} + \text{etc.}\right\},$$

si on calcule un nombre suffisant de termes dans le second membre de cette dernière égalité, on aura une valeur approchée de ce second membre, qui servira à obtenir par approximation celle de e^x et qui différera d'autant moins de la véritable, que l'on aura calculé un plus grand nombre de termes de la série

$$1 + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^8}{2..8} + \text{etc.} :$$

on pourrait aussi combiner la série qui donne l'expression du sinus avec celle qui donne la valeur de $e^x - e^{-x}$ et faire servir l'équation résultante à déterminer la valeur de e^x.

236. Pour montrer une application fort simple du développement des exponentielles, supposons que dans le développement de e^x on substitue partout au lieu de x, $i(a+b+c+...)$, on aura

$$e^{i(a+b+c+\cdots)} = 1+i\{a+b+c+\cdots\}+\frac{i^2}{2}\{a+b+c+..\}^2$$

$$\frac{i^3}{2.3}\{a+b+c..\}^3+...+\frac{i^n}{2...n}\{a+b+c+...\}^n+\text{etc.}$$

or

$$e^{ai+bi+ci+\ldots} = e^{ai} \times e^{bi} \times e^{ci} \ldots =$$

$$\left\{1 + ai + \frac{a^2 i^2}{2} + \ldots \frac{a^\lambda i^\lambda}{2 \ldots \lambda} + \ldots\right\}\left\{1 + bi + \frac{b^2 i^2}{2} + \ldots \frac{b^\mu i^\mu}{2 \ldots \mu} + \ldots\right\}$$

$$\left\{1 + ci + \frac{c^2 i^2}{2} + \ldots + \frac{c^\nu i^\nu}{2 \ldots \nu} + \text{etc.}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si on multiplie entr'eux les termes généraux de chacune des séries qui sont dans le second membre de cette dernière équation, on trouvera que le coefficient de $\lambda + \mu + \nu + \ldots$ ou de i^m, est composé d'autant de termes de la forme

$$\frac{a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots\ldots\ldots}{1 \ldots 2 \ldots 1 \ldots \mu \cdot 1 \ldots \nu \ldots};$$

qu'on peut satisfaire de fois en nombres entiers et positifs à l'équation

$$\lambda + \mu + \nu \ldots = m;$$

et comme le coefficient de la même puissance de i dans le premier membre est égal à

$$\frac{\{a + b + c + \ldots\}^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots m},$$

il en résulte que le développement de

$$\{a + b + c + \ldots\}^m$$

est composé d'autant de termes de la forme

$$\frac{1.2\ldots m\left\{a^{\lambda}\,b^{\mu}\,c^{\nu}\ldots\right\}}{1\ldots\lambda.1\ldots\mu.1\ldots\nu\ldots},$$

qu'il est possible de satisfaire en nombres entiers et positifs à l'équation

$$\lambda+\mu+\nu+\ldots=m,$$

237. On vient de voir dans ce qui précède, l'usage qu'on peut du développement des exponentielles tenir celui d'une puissance entière et po d'un polynome. Nous allons maint e une marche rétrograde, et montrer com nent on peut faire dépendre le développement des exponentielles de la formule du binome, et par consequent des seuls principes de l'analyse combinatoire.

238. Considérons les deux séries

$$1+a+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{2..3}+\ldots+\frac{a^n}{2\ldots n}+\ldots$$

$$1+b+\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{2.3}+\ldots+\frac{b^n}{2\ldots n}+\ldots$$

dont le nombre des termes dans l'une et dans l'autre est infini. Si on les multiplie entr'elles, le premier terme du produit sera l'unité, et les autres se partageront en termes de première dimension, de seconde dimension, de troisième dimension,

et ainsi de suite à l'infini. Pour obtenir tous les termes de la dimension n, il faudra multiplier le terme de la dimension n dans la première série par le premier terme de la seconde série, puis y ajouter le produit de la dimension $n-1$ de la première série par le second terme de la seconde série, puis ajouter au résultat le produit du terme de la dimension $n-2$ de la première série par le terme de la seconde dimension dans la seconde série, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'en prenant ainsi les termes à rebours dans la première série et en avançant toujours dans la seconde, on soit arrivé au produit du premier terme de la première série par le terme de la dimension n dans la seconde; en procédant ainsi, on trouvera que la somme des termes de n dimensions dans le produit des deux séries sera égal à

$$\frac{a^n}{2..n}+\frac{a^{n-1}b}{2..n-1}+\frac{a^{n-2}}{1..n-2}\cdot\frac{b^2}{2}+\frac{a^{n-3}}{1..n-3}\cdot\frac{b^3}{2.3}+\text{etc.},$$

quantité qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{1}{2..n}\left\{a^n+na^{n-1}b+\frac{n.n-1}{2}a^{n-2}b^2+\text{etc.}\right\}$$

or la partie qui est dans la parenthèse, est le développement de $\{a+b\}^n$, ainsi tous les

termes du produit qui sont de la dimension n peuvent se réduire à un seul qui est ..... $\frac{(a+b)^n}{1\ldots n}$; par conséquent le produit des deux séries que nous venons de considérer, est

$$1 + \{a+b\} + \frac{\{a+b\}^2}{1\ldots 2} + \ldots + \frac{\{a+b\}^n}{2\ldots\ldots n} + \ldots$$

c'est-à-dire une série semblable à la première de celles dont nous venons de parler, et qui se compose avec la somme des deux quantités a et b de la même manière que la première se compose avec a.

239. Si on multiplie ce résultat par la série

$$1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} + \ldots + \frac{c^n}{2\ldots n} + \text{etc.}$$

le produit qu'on obtiendra, sera une série qui se composera avec $a+b+c$ de la même manière que la dernière série est composée en c; en continuant ainsi, on verra qu'en quelque grand nombre que soient les séries

$$1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{2.3} + \ldots \frac{a^n}{2\ldots n} + \ldots.$$

$$1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{2.3} + \ldots \frac{b^n}{2\ldots n} + \ldots.$$

$$1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} + \ldots \frac{c^n}{2\ldots n} + \ldots.$$

.....

le produit qui en résultera, sera une série semblable à l'une d'elles, et qui se composera avec la somme de toutes les quantités $a, b, c, d...$ de la même manière que la première est composée en a; cela posé, si on suppose que toutes les quantités $a, b, c, d....$ soient égales entr'elles, et qu'elles soient en nombre m, on trouvera que la première série élevée à la puissance m, est égale à

$$1 + ma + \frac{m^2a^2}{2} + \frac{m^3a^3}{2.3} + \text{etc.};$$

si donc on suppose que le nombre a soit égal à l'unité, on aura, en supposant toujours que le nombre m est un nombre entier et positif

$$\left\{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.}\right\}^m =$$

$$1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2.3} + \frac{m^4}{2.3.4} + \text{etc.};$$

si donc on désigne par e la quantité qui, dans le premier membre, est comprise entre les deux parenthèses, on aura, lorsque le nombre m sera entier

$$e^m = 1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2.3} + \frac{m^4}{2.3.4} + \text{etc.};$$

par conséquent, lorsque le nombre m sera un

nombre entier, on pourra à toute la série qui compose le second membre de cette équation, substituer une puissance du nombre e, marquée par ce nombre entier.

240. Considérons maintenant la série

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

dans laquelle nous supposerons que x représente une fraction rationnelle $\frac{p}{q}$, les deux termes p et q étant des nombres entiers, on aura

$$\left\{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}\right\}' =$$
$$1 + qx + \frac{q^2x^2}{2} + \frac{q^3x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

mais on a $x = \frac{p}{q}$, ou $qx = p$, ainsi

$$\left\{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}\right\}' =$$
$$1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3} + \text{etc.} = e^p,$$

si des deux membres de cette dernière équation, on tire une racine du degré q, on aura, en remplaçant $\frac{p}{q}$ par x, l'équation

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \text{etc.} = e^x;$$

ainsi que la quantité x soit un nombre entier ou une fraction, la série précédente est toujours égale à une puissance du nombre e dont le degré est marqué par le nombre x.

241. Si la quantité x était irrationnelle, on pourrait la concevoir comprise entre deux quantités rationnelles $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ aussi resserrées qu'on voudra, de sorte que la valeur de la série

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

sera comprise entre deux séries semblables à la précédente, et qui résulteront de la substitution de $\frac{p}{q}$ et de $\frac{r}{s}$ à la place de x; et comme celles-ci sont respectivement égales à $e^{\frac{p}{q}}$ et à $e^{\frac{r}{s}}$, il en résulte que la première doit exprimer une quantité comprise entre $e^{\frac{p}{q}}$ et $e^{\frac{r}{s}}$, et par suite une quantité égale à e^x; par conséquent, quelles que soient les valeurs positives de x, on aura

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

242. Si la quantité x était négative, la série précédente deviendrait

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

et sa valeur serait égale à e^{-x}; pour s'en convaincre, considérons les deux séries

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \quad ; + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

$$1 + y + \frac{y^2}{2} \quad + \frac{y^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Si on les multiplie entr'elles, le produit qui en résultera sera égal à

$$1 + \{x+y\} + \tfrac{1}{2}\{x+y\}^2 + \frac{1}{2.3}\{x+y\}^3 + \text{etc.}$$

quelles que soient d'ailleurs les valeurs de x et de y, si donc on suppose $y = -x$, on aura

$$\left\{1 + x + \frac{x^2}{2} + \text{etc.}\right\}\left\{1 - x + \frac{x^2}{2} + \text{etc.}\right\} = 1.$$

Les deux séries qui entrent comme facteurs dans le premier membre de cette équation, étant réciproques l'une de l'autre, il en résulte, à cause que la première est égale à e^x, que la seconde est égale à e^{-x}, par conséquent on

a

246. Si on élève les deux membres de l'équation $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ à la puissance kx, on aura

$$e^{kx} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nkx} =$$

$$1+kx+\frac{kx-\frac{1}{n}}{2}+\frac{kx-\frac{1}{n}.kx-\frac{2}{n}}{2.3}+\frac{kx-\frac{1}{n}.kx-\frac{2}{n}.kx-\frac{3}{n}}{2.3.4}+\text{etc.}$$

et comme n est infini, tous les termes dans lesquels cette lettre se trouve au dénominateur disparaissent, et on a

$$e^{kx} = 1+kx+\frac{k^2x^2}{2}+\frac{k^3x^3}{2.3}+\frac{k^4x^4}{2.3.4}+\text{etc.}:$$

si on fait $e^k = a$, on aura, en observant que k est le logarithme de a, dans le système dont la base est e

$$a^x = 1+x\log.a+\frac{x^2.\log.^2a}{2}+\frac{x^3.\log.^3a}{2.3}+\text{etc.},$$

ce qui est la formule que nous avons déjà trouvée par d'autres moyens.

247. Au lieu de considérer le développement de e^{kx} comme résultant de celui de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nkx}$, lorsqu'on y fait n infini, on pourrait le regarder comme provenant du déve-

loppement de $\left(1+\frac{k}{n}\right)^{nx}$; lorsqu'on y fait n infini, c'est une suite nécessaire de ce qu'on a

$$e^{kx}=\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^{nkx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}\right\}^{nx},$$

et de ce qu'il suffit de prendre, au lieu de $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^{k}$, les deux premiers termes du développement de cette puissance, puisque si on avait égard aux autres termes, l'hypothèse de n infini ferait disparaître tous ces derniers du résultat; mais il ne faut point perdre de vue que l'équation $e^{kx}=\left\{1+\frac{k}{n}\right\}^{nx}$ ne peut avoir lieu qu'autant qu'on y fait n infini, et que cette supposition est celle qu'il faut établir pour faire coïncider le développement des puissances avec celui des exponentielles.

248. La transformation par laquelle on passe des exponentielles aux puissances, trouve dans l'analyse un grand nombre d'applications; nous allons montrer l'usage qu'on en peut faire pour trouver la valeur de l'intégrale $\int e^{-t^2}dt$, prise depuis $t=0$, jusqu'à $t=$ l'infini; pour cela substituons à e^{-t^2} l'expression $\left\{1-\frac{t^2}{n}\right\}^{n}$ qui lui est égale quand on fait n in-

fini. Si on pose l'équation $1-\frac{t^2}{n}=x^2$, on en déduira facilement que la valeur de l'intégrale proposée, prise entre les limites données, est égale à

$$\sqrt{n}\cdot\int\frac{x^{2m}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

cette dernière intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et le nombre n étant infini; or on a, en désignant par π le rapport de la circonférence au diamètre (*voyez* le Traité des différences et des séries de M. Lacroix, page 394, première édition),

$$\left(\int\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\int\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{n\pi}{2(2n+1)}=\frac{\pi}{4+\frac{1}{n}}.$$

Si dans cette équation on fait n infini, afin de revenir à l'intégrale proposée, on aura, en extrayant la racine carrée de chaque membre, l'équation suivante :

$$\sqrt{n}\cdot\int\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{4},$$

puisque lorsque n est infini, les deux intégrales

$$\int\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad \text{et} \quad \int\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

sont égales entr'elles, lorsqu'elles sont prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; mais la valeur du premier membre de la dernière équation, prise entre ces limites, est égale à celle de l'intégrale $\int e^{-t^2} dt$, prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t =$ l'infini; ainsi la valeur de cette dernière intégrale, prise entre ces limites, est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ceux qui desireront plus de détails sur cette intégrale définie, pourront recourir au dixième livre de la Mécanique céleste, et aux Exercices de Calcul intégral de M. Legendre.

249. Pour terminer tout ce que nous avons à dire sur le développement des exponentielles, nous remarquerons qu'on aurait pu éviter, dans la dernière méthode, la considération de l'infini, car si on considère l'équation

$$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n = 1+1+\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{n}\right\}+\frac{1}{2.3}\left\{1-\frac{1}{n}\right\}\left\{1-\frac{2}{n}\right\}+\text{etc.}$$

et qu'on y change n en $-n$, on aura

$$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}^{-n} = 1+1+\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{n}\right\}+\frac{1}{2.3}\left\{1+\frac{1}{n}\right\}\left\{1+\frac{2}{n}\right\}+\text{etc.:}$$

or, dans ces deux séries, les deux premiers termes sont communs; de plus, le troisième terme de la première série est moindre que

$\frac{1}{2}$, tandis que le troisième terme de la seconde série est plus grand que cette quantité; si ensuite on considère le quatrième terme de la première série, on trouvera qu'il est moindre que $\frac{1}{2.3}$, tandis que le quatrième terme de la seconde série est plus grand que cette quantité; en continuant à raisonner ainsi, on trouvera que la première série est moindre que

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{etc.},$$

tandis que la seconde est plus grande que cette quantité, quelque considérable d'ailleurs que soit le nombre n; or, à mesure que le nombre n augmente, les deux puissances $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ s'approchent continuellement de la série précédente, l'une étant en excès et l'autre en défaut; et comme chacune d'elles peut en approcher de plus près qu'aucune grandeur donnée, il en résulte que le nombre e est la limite vers laquelle tend continuellement l'une ou l'autre des quantités $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ ou $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$; par conséquent e^{kx} sera égal à la limite vers laquelle tend continuellement le développement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nkx}$, à mesure que le nombre

n augmente; et, comme ce développement est égal à

$$1+kx+\frac{kx}{2}\cdot\left\{kx-\frac{1}{n}\right\}+\frac{k^2x^2}{2.3}\left\{kx-\frac{1}{n}\right\}\left\{kx-\frac{2}{n}\right\}+\text{etc.},$$

et que la limite vers laquelle tend continuellement cette quantité, à mesure que n augmente, est la quantité indépendante de n, il s'ensuit qu'on a toujours

$$e^{kx}=1+kx+\frac{k^2x^2}{2}+\frac{k^3x^3}{2.3}+\text{etc.},$$

comme nous l'avons déja trouvé plusieurs fois.

250. On trouvera peut-être que nous nous sommes trop étendus sur le développement des exponentielles, mais il convient de faire observer ici qu'il n'est jamais inutile de présenter les théories sous différens aspects, lorsqu'elles ont quelque chose de particulier; car non-seulement notre esprit acquiert par là plus de force et d'étendue, mais aussi les liaisons qu'il établit sont plus claires et plus rapides; d'ailleurs il y a des méthodes qui sont plus propres à remplir certaines vues que d'autres, et qui peuvent conduire facilement à des résultats auxquels il serait souvent assez difficile d'arriver en suivant d'autres voies.

Du développement des Logarithmes en séries.

251. Dans ce qui précède nous nous sommes occupés de trouver un nombre par son logarithme; nous allons maintenant nous occuper de la question inverse, c'est-à-dire de celle qui a pour objet de trouver le logarithme lorsqu'on donne le nombre.

252. Si on considère les logarithmes pris dans le système dont la base est e, la question se trouve résolue d'avance au moyen de l'équation

$$\log.a = A = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \text{etc.}$$

Si dans cette formule on change a en x, on aura

$$\log.x = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + \text{etc;}$$

mais cette formule, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, a l'inconvénient de n'être convergente qu'autant que $x-1$ ne surpasse pas l'unité. Si on en veut une qui soit convergente dans tous les cas, on prendra la seconde expression que nous avons trouvée pour A, § 226 : si

on y substitue x au lieu de a, on aura

$$\log. x =$$

$$\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{x}\right)^4+\text{etc.};$$

formule convergente pour toutes les valeurs de x plus grandes que l'unité.

253. Si dans la première formule on change x en $1+x$, elle se simplifie et devient

$$\log.(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}$$

Cette formule ne sera convergente qu'autant que x sera moindre que l'unité, et par conséquent ne pourra servir à calculer les logarithmes des nombres au-dessus de 2. Son avantage dans le calcul des logarithmes est donc jusqu'à présent très-limité; mais au moyen d'un artifice fort simple, on peut en trouver une qui soit toujours convergente lorsque le nombre dont on veut avoir le logarithme est plus grand que l'unité: en effet, si dans la dernière série on change x en $-x$ on aura

$$\log.(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\right).$$

Si on retranche cette série de la première, on aura, en observant que la différence de deux logarithmes est égale au logarithme du quotient,

$$\log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\text{etc.}\right).$$

254. Cette formule est convergente pour toutes les valeurs de x moindres que l'unité; mais à mesure que x approche de l'unité, le dénominateur diminue continuellement, jusqu'à devenir aussi petit qu'on voudra, et comme le numérateur est toujours plus grand que 1, il en résulte que la fraction $\frac{1+x}{1-x}$ pourra représenter un nombre quelconque; si donc on pose $\frac{1+x}{1-x}=n$, et qu'on substitue dans le second membre au lieu de x sa valeur $\frac{n-1}{n+1}$, on aura

$$\log.n=2\left\{\frac{n-1}{n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5+\text{etc.}\right\},$$

formule qui, comme on voit, est toujours convergente, puisque ses termes décroissent plus rapidement que ceux d'une progression géométrique; ainsi elle pourra être employée à trouver le logarithme d'un nombre quelconque

pourvu qu'on prenne un assez grand nombre de termes de la série; néanmoins, comme elle converge lentement, on fera bien de ne pas l'employer pour le calcul des logarithmes et de recourir à celles que nous ferons connaître plus loin.

255. Si au lieu de faire $\frac{1+x}{1-x} = n$, on fait $\frac{1+x}{1-x} = \frac{y}{z}$, il faudra substituer dans la formule précédente $\frac{y}{z}$ partout où il y aura n, ainsi on aura

$$\log. \frac{y}{z} = \left\{ \frac{y-z}{y+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^5 + \text{etc.} \right\}.$$

Cette formule servira à trouver le logarithme de y lorsqu'on connaîtra celui de z, car on a

$$\log. \frac{y}{z} = \log. y - \log. z.$$

Ainsi on aura

$$\log. y = \log. z + \left\{ \frac{y-z}{y+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^5 + \text{etc.} \right\};$$

cette formule convergera d'autant plus rapidement que les quantités y et z différeront peu entre elles, et que leur somme sera plus considérable.

256. Si dans la formule précédente on fait $y-z=d$, on en déduira $y=z+d$, et par suite $y+z=2z+d$; par conséquent on aura

$$\log.(z+d)=\log.z+\frac{d}{2z+d}+\frac{1}{3}\left(\frac{d}{2z+d}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{d}{2z+d}\right)^5+\text{etc.}$$

série au moyen de laquelle on trouvera facilement le logarithme d'un nombre, lorsqu'on aura celui d'un nombre moindre, et cela d'autant plus rapidement que les deux nombres seront plus considérables, et que leur différence sera plus petite.

257. Si dans le développement que nous avons trouvé pour le logarithme de $(1+x)$, on substitue $\frac{i}{x}$ au lieu de x, et qu'on observe que

$$\log.\left(1+\frac{i}{x}\right)=\log.\left(\frac{x+i}{x}\right)=\log.(x+i)-\log.x,$$

on aura

$$\log.(x+i)=\log.x+\frac{i}{x}-\frac{i^2}{2x}+\frac{i^3}{3x^3}-\frac{i^4}{4x^4}+\text{etc.},$$

formule au moyen de laquelle on peut trouver le logarithme d'un nombre lorsqu'on connaît celui du nombre immédiatement inférieur;

mais on ne peut l'employer avec avantage que lorsque le nombre dont on a le logarithme est déjà très-grand.

258. Si dans la série qui donne le logarithme de $1-x$ (*voyez* le § 253), on fait $x=1$, on trouvera que le second membre est égal à

$$-\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{etc.}\right\},$$

et comme le premier membre est le logarithme de zéro, et que le logarithme de zéro est égal à l'infini négatif, il en résulte que la somme des termes

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{etc.}$$

est infinie.

259. La démonstration que nous venons de donner, il faut en convenir, ne porte point avec elle le caractère d'une conviction parfaite, car bien que les termes diminuent continuellement, néanmoins, comme le rapport de deux termes consécutifs s'approche d'autant plus de l'unité qu'ils sont plus éloignés du premier terme de la série, et que dans le passage d'un terme à l'autre, ce rapport va en augmentant, la

marche de la série ne peut plus être comparée à celle d'une progression géométrique décroissante; ainsi l'esprit peut rester dans le doute, si la série est encore propre à donner la valeur du premier membre de l'équation; on peut à la vérité le lever en quelque sorte, non en comparant la série avec une progression géométrique décroissante, mais avec ce que devient la série $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+$ etc., lorsqu'on donne à x une valeur qui diffère très-peu de l'unité; car, dans cette hypothèse, un terme quelconque de la série harmonique $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$, étant plus grand que le terme correspondant de la série précédente, il s'ensuit que toute la série harmonique surpasse ce que devient l'autre série, lorsque pour x on substitue une quantité plus petite que l'unité, quelque peu différente d'ailleurs qu'elle soit de cette quantité. Or on peut faire ensorte que x en diffère si peu, que la première série surpasse un nombre quelconque; donc la somme des termes de la série harmonique est aussi plus grande qu'aucune grandeur; par conséquent elle est infinie.

260. Pour achever de dissiper les nuages qui

pourraient encore rester sur ce qui vient d'être dit, nous allons considérer la série dont il s'agit, indépendamment de la fonction d'où elle tire son origine, et montrer qu'effectivement on peut y trouver l'unité un nombre infini de fois; pour cela, imaginons que l'on groupe les termes de la série harmonique

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\text{etc.}$$

de manière que chaque groupe contienne toutes les fractions dont les dénominateurs sont les nombres entiers compris depuis une puissance de 2 exclusivement, jusques et y compris la puissance de 2 immédiatement supérieure; cela posé, si on considère le groupe suivant

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\frac{1}{2^n+3}+\ldots+\frac{1}{2^n+2^n},$$

on trouvera que la somme des fractions qui le composent, est plus grande que la dernière des fractions qui s'y trouve, répétée autant de fois qu'il y a de ces fractions; or il est évident qu'il y a 2^n de ces fractions, et que la plus petite de toutes est égale à $\frac{1}{2^{n+1}}$; par conséquent tout le groupe est plus grand que

$\frac{2^n}{2^n+1}$, et par conséquent surpasse $\frac{1}{2}$; or il y a autant de ces groupes qu'il y a de puissances de 2; et comme ces puissances sont en nombre infini, il en résulte que la somme des termes de la série proposée contient une infinité de fois $\frac{1}{2}$, et par suite une infinité de fois l'unité.

N. B. Cette dernière démonstration qui est aussi remarquable par son élégance que par sa simplicité, appartient à M. Poinsot, qui a bien voulu me la communiquer.

261. Tandis que nous en sommes sur la série harmonique, nous allons faire connaître un résultat paradoxal fort curieux auquel cette série donne lieu et duquel on conclurait que le logarithme népérien de 2 serait égal à zéro.

Désignons la somme des termes de la série harmonique par s, de sorte qu'on ait

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{etc.} :$$

si on divise les deux membres par 2, on aura

$$\frac{1}{2}s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \text{etc.};$$

or le second membre de la première équation est la somme des fractions dont les numérateurs sont égaux à l'unité, et dont les dénominateurs sont les nombres pairs et les nombres impairs; et comme, en vertu de la seconde équation, la somme des fractions de dénominateurs pairs forme la moitié de la série, il faut que celle des fractions de dénominateurs impairs forme l'autre moitié, de sorte qu'on ait

$$\frac{1}{2}s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.},$$

retranchant de cette équation celle qui la précède, on aura

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.};$$

or le second membre de cette dernière équation est ce que devient l'expression du logarithme de $1+x$, lorsqu'on y fait $x = 1$; ainsi on a log. $2 = 0$.

Cette conclusion qui est évidemment absurde, tient à ce qu'on n'a pas eu égard à ce que deviennent les fonctions complémentaires, qu'il faut toujours ajouter aux termes du développement des fonctions, quelque loin

qu'on le prolonge, et quelle que soit la grandeur de la variable, et elle offre en même temps un exemple remarquable du danger de se livrer aux conclusions auxquelles les séries peuvent donner lieu, lorsqu'on n'a aucun moyen de rien statuer sûr la nature de ces fonctions ou sur leur grandeur.

262. Quoique la première formule que nous avons exposée pour trouver la valeur de $\log. x$ ne paraisse point propre à calculer immédiatement le logarithme d'un nombre quelconque, on peut, à l'aide d'un artifice fort simple, la faire servir pour tous les nombres, en cherchant à ramener le calcul du logarithme d'un nombre, quelque grand qu'il soit, à celui d'un nombre très-peu différent de l'unité; c'est à quoi on parviendra toujours en regardant un nombre, quelque grand qu'il puisse être, comme une puissance d'un degré très-élevé d'une quantité peu différente de l'unité, et que nous représenterons par $1 + x$. Si donc on désigne par m l'exposant qui marque à quelle puissance il faut élever $(1 + x)$ pour avoir y, on aura

$$y = (1 + x)^m;$$

si on prend les logarithmes des deux membres

de cette équation, on aura

$$\log.y = m\log.(1+x) = m\left\{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right\};$$

or la quantité m étant absolument arbitraire, on peut la prendre tellement grande que la quantité x soit extrêmement petite, alors la série trouvée pour $\log.y$ sera très-convergente.

263. Si on veut avoir le logarithme de y en fonction du nombre y, il faudra dans la série précédente substituer pour x sa valeur $\sqrt[m]{y} - 1$ tirée de l'équation $y = (1+x)^m$, par ce moyen on aura

$$\log.y = m\left\{(\sqrt[m]{y}-1) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[m]{y}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[m]{y}-1)^3 - \text{etc.}\right\}.$$

264. Si au lieu de prendre pour le logarithme de $1+x$ la série $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.}$, on prenait la suivante

$$\frac{x}{1+x} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \text{etc.},$$

que nous avons donnée plus haut, § 252, on aurait

$$\log.y = m\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{y}}\right) + \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{y}}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{y}}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$

Si donc on prend du nombre dont on veut avoir le logarithme, une racine d'un degré assez élevé pour qu'il n'y ait plus que l'unité avant la virgule et un nombre s de zéros à la suite, et qu'on s'arrête à $2s$ décimales, il est évident que les deuxième, troisième, etc. termes de l'une ou de l'autre de ces deux dernières séries ne donneront rien, et que le premier terme seul suffira pour avoir avec la précision desirée, le logarithme cherché; ainsi on aura sensiblement en supposant que le nombre m soit très-considérable, et que les logarithmes sont calculés dans la base dont le module est l'unité,

$$\log.y = m\{\sqrt[m]{y} - 1\}.$$

265. Quoique cette formule paraisse plus simple que les autres, néanmoins la nécessité où l'on est de prendre pour m un nombre très-considérable, fait qu'on ne s'en sert pas lorsqu'on veut calculer les logarithmes des nombres. Si on voulait l'employer, il n'y aurait qu'à prendre pour m une puissance exacte de 2, puisqu'on n'aurait que des extractions successives de racines carrées à faire, lesquelles pourraient s'abréger en observant que la partie décimale d'une racine est toujours la moitié de celle

de la racine précédente, lorsque dans celle-là on s'arrête à deux fois autant de décimales qu'il y a de zéros à la suite de l'unité dans celle-ci ; c'est ce qu'on aperçoit facilement au moyen de la formule

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}z + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}z^2 + \text{etc.},$$

puisque le second membre se réduit, à très-peu de chose près, aux deux premiers termes, lorsque z est très-petit.

266. On peut remarquer que les séries des §. 252, 263, 264, ne sont que des cas particuliers d'une autre série plus générale, car on a

$$\log.a = A = \frac{1}{p}\left\{(a^p-1) - \frac{1}{2}(a^p-1)^2 + \frac{1}{3}(a^p-1)^3 - \text{etc.}\right\};$$

si on change a en y, on aura

$$\log.y = \frac{1}{p}\left\{(y^p-1) - \frac{1}{2}(y^p-1)^2 + \frac{1}{3}(y^p-1)^3 - \text{etc.}\right\},$$

si dans cette équation on fait successivement

$$p=1,\ p=-1,\ p=\frac{1}{m},\ p=-\frac{1}{m},$$

on retombera sur les formules des articles cités.

267. Les formules obtenues précédemment pour le développement des logarithmes en séries, sont toutes subordonnées à l'hypothèse où on les rapporterait au système dont la base est e. Si on voulait les rapporter à tout autre système, on le pourrait facilement; pour cela il suffirait de diviser le logarithme de chacun des nombres calculés dans le premier système, par celui de la base du nouveau, calculé dans le premier, c'est ce qui est tout à fait évident; car si on désigne par y un nombre, par x son logarithme pris dans le système dont la base est e, et par x' le logarithme du même nombre pris dans le système dont la base est a, on aura, à cause de $y = e^x$ d'une part, et de $y = a^{x'}$ de l'autre, l'équation $e^x = a^{x'}$; mais $a = e^A$ ainsi $a^{x'} = e^{Ax'}$ et par suite $x = Ax'$, d'où l'on tire

$$x' = \frac{x}{A},$$

ce qui est précisément le résultat énoncé plus haut : ainsi on aura, en supposant qu'on prend les logarithmes dans le système dont la base est a,

$$\log. y = \frac{(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+ \text{etc.}}{(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4+ \text{etc.}}.$$

268. Si dans cette formule on change y en $1+y$,

et qu'on prenne la fonction prime de chacun des termes du second membre, on trouvera qu'elle est égale à $\frac{1-y+y^2-y^3+\text{etc.}}{\log. a}$; or le numérateur de cette fraction est le développement de $\frac{1}{1+y}$; ainsi la fonction prime du logarithme de $1+y$ est égale à $\frac{1}{(1+y)\log. a}$; par conséquent la fonction prime du logarithme d'une quantité, prise dans un système quelconque, est égale à la fonction prime de cette quantité, divisée par cette quantité multipliée par le logarithme de cette base, pris dans le système dont la base est e.

269. Si on emploie les formules des § 254, 253, on en aura de nouvelles qui pourront servir à calculer le logarithme d'un nombre quelconque dans un système dont la base est a, en divisant chacune d'elles par d'autres séries semblables, et qui n'en différeront que par le nombre que l'on considère, qui se changera dans celui de la base auxquels on les rapporte.

270. Si on fait usage de la formule du n° (264) pour calculer le logarithme d'un nombre dans un système dont la base est a, on aura, en ne

prenant que le premier terme, ce qui suffit lorsque le nombre m est très-considérable,

$$\log. y = \frac{\sqrt[m]{y} - 1}{\sqrt[m]{a} - 1},$$

ce qui montre que le logarithme d'un nombre pris dans un système est égal au rapport des excès des racines semblables et d'un degré très-élevé de ce même nombre et de la base sur l'unité, en se bornant à une approximation; mais cette approximation différera d'autant moins de la vérité, que l'indice de la racine sera plus considérable et le résultat sera rigoureusement exact en faisant m égal à l'infini. Ainsi le logarithme d'un nombre pris dans un système quelconque est égal au rapport des excès des racines infinitièmes du nombre et de la base sur l'unité.

271. C'est ce qu'on peut facilement vérifier; car cet énoncé traduit en calcul fait retomber sur la formule du paragraphe (267); en effet,

$$y^{\frac{1}{m}} = (1 + y - 1)^{\frac{1}{m}} =$$
$$1 + \frac{1}{m}\left\{(y-1) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - 1\right)(y-1)^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$a^{\frac{1}{m}} = (1 + a - 1)^{\frac{1}{m}} =$$
$$1 + \frac{1}{m}\left\{(a-1) + \left(\frac{1}{m} - 1\right)(a-1)^2 + \text{etc.}\right\},$$

Si on retranche l'unité du premier et du dernier membre de chacune de ces deux équations et qu'on les divise ensuite, le premier résultat par le second, et qu'après la suppression du facteur commun $\frac{1}{m}$, tant au numérateur qu'au dénominateur, on fasse m infini, on aura

$$\frac{\sqrt[m]{y} - 1}{\sqrt[m]{a} - 1} =$$

$$\frac{(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \frac{1}{4}(y-1)^4 + \text{etc.}}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \text{etc.}} = \log. y.$$

272. Ce qui vient d'être dit dans le numéro précédent est encore une suite nécessaire de l'équation $y = e^{kx} = a^x = \left\{ 1 + \frac{kx}{n} \right\}^n$ qui a lieu lorsque le nombre n est infini, car on en tire $y^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{kx}{n}$, et de là

$$\log. y = \frac{n}{k} \left\{ y^{\frac{1}{n}} - 1 \right\},$$

si dans cette dernière équation, on change y en a, on aura, en supposant que l'on prend les logarithmes dans le système dont la base

est a,

$$1 = \frac{n}{k}\left\{a^{\frac{1}{n}} - 1\right\},$$

divisant ces deux dernières équations entr'elles, il viendra comme ci-dessus

$$\log. y = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{a^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

Si on développe le numérateur et le dénominateur par la formule du binome, en substituant $1+y-1$, au lieu de y, et $1+a-1$, au lieu de a, on aura le résultat qu'on a déjà obtenu, pourvu qu'on ne perde point de vue qu'il faut y faire n infini.

273. Si on prend la fonction prime du second membre de l'équation

$$\log. y = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{a^{\frac{1}{n}} - 1},$$

on trouvera qu'il est égal à $\dfrac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n\left\{a^{\frac{1}{n}} - 1\right\}}$; or

n étant infini, le numérateur de cette fraction se réduit à y^{-1}, et le dénominateur est égal au logarithme du nombre a, pris dans le système dont la base est e; par conséquent la fonction prime du logarithme de y est égale à $\frac{1}{y \log. a}$, ce qui revient à ce qui a déjà été trouvé plus haut; *voyez* le §. 268.

274. Avant d'aller plus loin, il conviendrait d'examiner quelle influence les termes que l'on néglige peuvent avoir sur le véritable résultat, et de voir quel est le degré d'exactitude sur lequel on peut compter en n'ayant égard qu'aux premiers termes de chacune des séries précédentes; mais la détermination des limites entre lesquelles se trouve l'erreur qu'on commet n'offrant aucunes difficultés, nous ne nous y arrêterons point.

275. Les formules exposées précédemment, résultaient en partie des relations trouvées entre A et log. a et par conséquent de la forme établie sur le développement des exponentielles; mais on peut y arriver directement et sans rien emprunter de ce qui précède. Pour cela, il faut se rappeler que le logarithme de l'unité dans un système quelconque étant nul, il faut que

la série, qui est le développement dulogarithme d'un nombre quelconque, jouisse de la propriété de devenir nulle lorsque pour ce même nombre on substitue l'unité. Si donc on représente ce nombre par $1+x$, l'expression de son logarithme deviendra nulle lorsqu'on fera $x=0$. Ainsi le développement dont il s'agit ne contiendra que des puissances positives de x. Par conséquent si on désigne les exposans de x dans ce développement, en commençant par les plus faibles, par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., et les coefficiens de ces mêmes puissances, par A, B, C, D, etc., on aura

$$\log.(1+x) = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \text{etc.} ;$$

par conséquent,

$$2\log.(1+x) = 2Ax^{\alpha} + 2Bx^{\beta} + \text{etc.}$$

Or

$$2\log.(1+x) = \log.(1+x)^2 = \log.(1+2x+x^2).$$

Si donc on substitue pour x dans la première formule $2x+x^2$, au lieu de x, on aura

$$2\log.(1+x) = A(2x+x^2)^{\alpha} + B(2x+x^2)^{\beta} + \text{etc.}$$

Ainsi, en comparant le second membre de cette

dernière égalité avec le second membre de la première équation, on aura

$$2Ax^{\alpha}+2Bx^{\beta}+\ldots=A(2x+x^{2})^{\alpha}+B(2x+x^{2})^{\beta}+\text{etc.}$$

Si on divise les deux membres de cette équation par x^{α}, on aura une identité qui devant se vérifier indépendamment d'aucune valeur de x, aura encore lieu lorsqu'on fera $x=0$. Cette supposition étant faite, on aura

$$2A=2^{\alpha}A,$$

équation qui peut avoir lieu de deux manières, soit en faisant $A=0$ ou $\alpha=1$. Or A ne pouvant être nul, il faut que $\alpha=1$; on aura donc

$$\log.(1+x)=Ax+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+Dx^{\delta}+\text{etc.}$$

Cela posé, si dans cette dernière égalité on substitue $x+i$ au lieu de x, on aura

$$\log.(1+x+i)=A(x+i)+B(x+i)^{\beta}+C(x+i)^{\gamma}+\text{etc.}$$

Or

$$1+x+i=(1+x)\left(1+\frac{i}{1+x}\right),$$

par conséquent

$$\log.(1+x+i) = \log.(1+x) + \log.\left(1+\frac{i}{1+x}\right);$$

ainsi on aura

$$\log.(1+x)+\log.\left(1+\frac{i}{1+x}\right) =$$

$$A(x+i)+B(x+i)^{\beta}+C(x+i)^{\gamma}+\text{etc.}$$

Si donc on substitue pour $\log.(1+x)$ et $\log.\left(1+\frac{i}{1+x}\right)$ leur développement en série, et qu'on développe les diverses puissances de $x+i$ qui se trouvent dans le second membre de cette dernière égalité, le premier résultat sera identiquement le même que le second; par conséquent le coefficient de la première puissance de i sera le même de part et d'autre. Or le coefficient de la première puissance de i dans le premier membre ne peut provenir que du développement de $\log.\left(1+\frac{i}{1+x}\right)$, puisque $\log.(1+x)$ est indépendant de i. Si donc on substitue $\frac{i}{1+x}$, au lieu de x dans la formule

$$\log.(1+x) = Ax + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.},$$

on trouvera que le coefficient de la première

puissance de i sera égal à $\frac{A}{1+x}$, et comme ce coefficient dans le second membre de l'équation ci-dessus s'obtient en multipliant chacun des termes de l'équation qui représente le développement de log. $(1+x)$ par l'exposant de x dans chacun d'eux, et diminuant l'exposant d'une unité, on aura l'équation

$$\frac{A}{1+x} = A+\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\delta Dx^{\beta-1}+\text{etc.}$$

or on a par la division

$$\frac{A}{1+x} = A - Ax + Ax^2 - Ax^3 + \text{etc.}$$

ainsi on aura

$$A+\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\delta Dx^{\delta-1}+\ldots = A - Ax + Ax^2 - Ax^3 + \text{etc.}$$

Cette égalité devant se vérifier indépendamment d'aucune valeur particulière de x, il faut que les termes qui coupent le même rang dans les deux membres soient identiques, et par suite, que les exposans de la variable dans ces mêmes termes soient égaux entr'eux, aussi bien que leurs coefficiens; par conséquent on aura pour déterminer les exposans et les coefficiens, les équations suivantes :

Entre

Entre les exposans,	Entre les coefficiens,
$\beta - 1 = 1$	$A = +A$
$\gamma - 1 = \beta$	$\beta B = -A$
$\delta - 1 = \gamma$	$\gamma C = +A$
.....	.....

des équations qui sont relatives aux exposans, on en tire

$$\beta = 2; \quad \gamma = 3; \quad \delta = 4; \text{ etc.}$$

Substituant pour β, γ, δ, etc. les valeurs qu'on vient de trouver dans les équations qui sont relatives aux coefficiens, on en déduit

$$A = A; \quad B = -\frac{A}{2}; \quad C = -\frac{A}{3}; \text{ etc.}$$

Si dans la première équation de l'article 275 on substitue pour les exposans et les coefficiens les valeurs qui viennent d'être trouvées, on aura, en observant que A est facteur commun de tous les termes, l'équation suivante

$$\log.(1+x) = A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right)$$

qui est précisément la même que nous avons donnée plus haut et dont toutes les autres ne sont en quelque sorte que des transformations.

[illegible] La quantité A reste indéterminée, excepté elle est indépendante de x et qu'elle reste la même pour les logarithmes de tous les nombres calculés sur une même base ; si on la détermine pour un nombre, elle le sera pour tous : or si on suppose que les logarithmes sont calculés dans le système dont la base est $1+b$, et qu'on cherche le logarithme de ce même nombre, on aura

$$\log.(1+b) = A\left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.}\right).$$

Mais le logarithme d'un nombre pris dans le système dont ce nombre est la base, étant égal à l'unité, on aura $\log.(1+b) = 1$, et par suite

$$A = \frac{1}{b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.}}$$

Si on reporte cette valeur de A dans la formule qui donne le logarithme de $1+x$, on aura

$$\log.(1+x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}}{b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.}}.$$

Le dénominateur de la valeur de A est égal au module de l'exponentielle dont la base serait $1+b$; et comme ce module est égal au logarithme de $1+b$, pris dans le système dont la

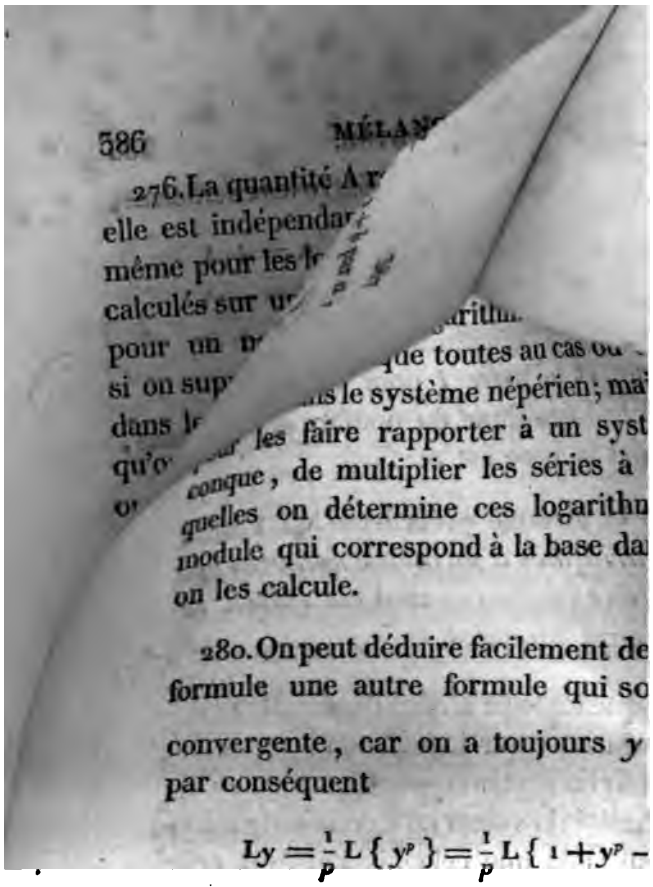
base est e, on aura, en désignant $1+b$ par a,

$$L(1+x)=\frac{1}{l.\,a}\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\right\},$$

la lettre L ici étant employée pour indiquer que l'on prend les logarithmes dans un système quelconque, et la lettre l pour indiquer que l'on prend le logarithme du nombre a dans le système dont la base est e.

277. De la formule précédente on conclut que *les logarithmes d'un même nombre, pris dans différens systèmes, sont en raison inverse de leurs modules.*

278. Puisque les logarithmes des nombres dépendent de la base sur laquelle on les calcule, on peut établir un système pour lequel le module soit égal à l'unité; la valeur qu'il convient de donner à la base, afin que cela ait lieu, est celle pour laquelle on a $la=1$, c'est-à-dire celui dont la base est e; on a donné à ces logarithmes le nom de *logarithmes naturels*, parce qu'ils résultent de la supposition la plus simple qu'on puisse faire sur le module, et parce qu'elle simplifie le calcul; depuis, M. Lacroix a proposé de consacrer à cette espèce particulière de logarithmes, le nom de leur inventeur



586 MÉLAN

276. La quantité A r
elle est indépendar
même pour les l
calculés sur u
pour un n
si on sup
dans l
qu'o
o

arithm.
que toutes au cas où
s le système népérien; ma
les faire rapporter à un syst
conque, de multiplier les séries à
quelles on détermine ces logarithm
module qui correspond à la base da
on les calcule.

280. On peut déduire facilement de
formule une autre formule qui so
convergente, car on a toujours y
par conséquent

$$Ly = \frac{1}{p} L\{y^p\} = \frac{1}{p} L\{1+y^p -$$

si dans la formule qui donne le log
$1+x$, on remplace x par $y^p - 1$,

$$Ly = \frac{1}{pl.a}\{(y^p-1) - \frac{1}{2}(y^p-1)^2 + \frac{1}{3}(y^p-$$

si dans celle-ci on remplace y par a

$$La = \frac{1}{pl.a}\{(a^p-1) - \frac{1}{2}(a^p-1)^2 + \frac{1}{3}(a^p -$$

(Néper), et on les a nommés *logarithmes népériens*.

279. Les formules qui ont été données plus haut pour calculer les logarithmes des nombres, se rapportent presque toutes au cas où on les calculerait dans le système népérien; mais il suffit, pour les faire rapporter à un système quelconque, de multiplier les séries à l'aide desquelles on détermine ces logarithmes par le module qui correspond à la base dans lesquels on les calcule.

280. On peut déduire facilement de la dernière formule une autre formule qui soit toujours convergente, car on a toujours $y = \{y^p\}^{\frac{1}{p}}$; par conséquent

$$Ly = \frac{1}{p} L\{y^p\} = \frac{1}{p} L\{1 + y^p - 1\};$$

si dans la formule qui donne le logarithme de $1+x$, on remplace x par $y^p - 1$, on aura

$$Ly = \frac{1}{pl.a}\{(y^p-1) - \tfrac{1}{2}(y^p-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y^p-1)^3 - \text{etc.}\};$$

si dans celle-ci on remplace y par a, on aura

$$La = \frac{1}{pl.a}\{(a^p-1) - \tfrac{1}{2}(a^p-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a^p-1)^3 - \text{etc.}\};$$

si on divise ces deux équations par a, et qu'on observe qu'on a $La = 1$, il en résultera

$$Ly = \frac{(y^p-1)-\frac{1}{2}(y^p-1)^2+\frac{1}{3}(y^p-1)^3-\frac{1}{4}(y^p-1)^4+\text{etc.}}{(a^p-1)-\frac{1}{2}(a^p-1)^2+\frac{1}{3}(a^p-1)^3-\frac{1}{4}(a^p-1)^4+\text{etc.}};$$

or on peut concevoir le nombre p assez grand pour que y^p et a^p diffèrent de l'unité d'aussi peu qu'on voudra; ainsi la formule pourra être rendue aussi convergente qu'on le voudra.

281. Ceux qui desireront connaître un plus grand nombre de formules, pour calculer les logarithmes des nombres, pourront recourir à l'introduction dont M. Delambre a enrichi les Tables trigonométriques de Borda, ou à l'introduction qui précède la seconde édition du grand Traité de Calcul différentiel de M. Lacroix, ils trouveront dans ces deux ouvrages sur ce sujet, tout ce qui peut rester à desirer dans celui-ci.

282. Avant de montrer par quelques applications l'usage qu'on peut faire de la théorie que nous venons d'exposer, nous allons chercher à établir directement que le logarithme de $1+x$ contient toujours un terme affecté de la première puissance de x, et en déduire, comme conséquence, la fonction prime du logarithme

d'une fonction quelconque de cette variable. Pour faire voir que le logarithme de $1+x$ contient un terme affecté de la première puissance de x, il suffira de montrer que $\frac{\mathrm{L}(1+x)}{x}$ contient un terme indépendant de la variable x, c'est à quoi on arrivera facilement, car on a

$$\frac{\mathrm{L}\{1+x\}}{x} = \mathrm{L}.\{1+x\}^{\frac{1}{x}} =$$

$$\mathrm{L}\left\{1+\frac{1}{x}.x+\frac{1}{x}.\frac{1}{x}-1.\frac{x^2}{2}+\text{etc.}\right\}.$$

$$= \mathrm{L}\left\{1+1+\frac{1.1-x}{2}+\frac{1.1-x.1-2x}{2.3}+\text{etc.}\right\};$$

or pour obtenir le terme qui dans le dernier membre est indépendant de x, il suffit de faire $x=0$; mais cette supposition réduit la quantité qui est comprise dans la parenthèse à

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\text{etc.};$$

et comme on désigne ce nombre ordinairement par e, il en résulte que le terme indépendant de x, dans $\frac{\mathrm{L}(1+x)}{x}$, est égal à $\mathrm{L}e$; par conséquent le premier terme du développement de $\mathrm{L}(1+x)$, est $x\mathrm{L}e$, ou, ce qui revient au

même, $\frac{x}{la}$, puisque $Le = \frac{1}{l.a}$ (*).

283. Si on désigne par p une fonction quelconque de x, et qu'après avoir substitué $x+i$, au lieu de x, elle devienne $p+ip'+$etc., le logarithme de p se changera dans celui de $p+ip'+$etc.; et comme cette quantité peut se mettre sous la forme de deux facteurs, dont l'un serait p, et dont l'autre serait $1+i\frac{p'}{p}+$ etc., on aura

$$L\left\{p+ip'+\text{etc.}\right\} = Lp + L\left\{1+i\frac{p'}{p}+\text{etc.}\right\},$$

or si on développe la seconde partie du second membre de cette équation, on trouvera que le terme affecté de la première puissance de i est égal à $i\frac{p'}{p.la}$; par conséquent *la fonction prime du logarithme d'une quantité est égale à la fonction prime de cette quantité, divisée*

(*) C'est ce qu'on aperçoit sur-le-champ; car si on représente Le par q, on aura $e = a^q$; de cette équation on tire $a = e^{\frac{1}{q}}$; par conséquent $\frac{1}{q} = l.a$, $l.a$ désignant comme plus haut le logarithme d'un nombre pris dans le système népérien, de cette dernière équation on tire $q = \frac{1}{l.a}$.

par le produit qu'on obtient en multipliant cette quantité par le logarithme népérien de la base.

284. Pour obtenir la fonction prime d'une puissance telle que p^m, p désignant une fonction quelconque de x, il faut substituer $x+i$, au lieu de x dans p, élever le résultat à la puissance m, et prendre le coefficient de la première puissance de i; or la substitution de $x+i$, au lieu de x dans p, change cette quantité en $p+ip'+$ etc. Si on élève ce résultat à la puissance m, on trouvera que le coefficient de i est $mp^{m-1}p'$; d'où il résulte que la *fonction prime d'une puissance est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par la puissance d'un degré moindre d'une unité, et par la fonction prime de la quantité qui est élevée à cette puissance.*

285. Dans le cas où $m=\frac{1}{2}$, on trouve que la fonction prime de $\sqrt{p}$ est égale à $\frac{\frac{1}{2}p'}{\sqrt{p}}$; par conséquent *la fonction prime d'un radical carré est égal à la moitié de la fonction prime de la quantité qui est sous le radical, divisée par ce radical.* Comme ce cas se présente fréquemment, il est bon de retenir cette règle.

286. Si on voulait obtenir la fonction prime d'une exponentielle telle que a^p, dans laquelle p est une fonction quelconque de x, il faudrait y substituer $x + i$ au lieu de x, et prendre le coefficient de la première puissance de i; or, par cette substitution, p se change en $p + ip' +$ etc.; ainsi a^p se changera en.... $a^{p+ip'+\text{etc.}}$; mais cette quantité est égale à $a^p \times a^{ip'+\text{etc.}}$, ou à $a^p \{ 1 + ip'l.a +$ etc. $\}$; par conséquent le coefficient de la première puissance de i, dans $a^{p+ip'+\text{etc.}}$, sera égal à $a^p p'l.a$; d'où il suit que la fonction prime d'une exponentielle est égale au produit de cette exponentielle par la fonction prime de l'exposant prise relativement à la variable principale et multipliée par le logarithme népérien de la base.

287. Il est bon d'observer que si une fonction était multipliée par une constante, tout l'accroissement de cette fonction serait aussi multiplié par cette constante; de sorte que la fonction dérivée d'une fonction quelconque multipliée par une constante, est aussi multipliée par cette même constante.

Application du développement des logarithmes, à la recherche des sommes des puissances des racines d'un polynome en fonction des coefficiens de ce polynome.

288. Soit

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Tx + V$$

un polynome; si on désigne ses racines par $a, b, c, d, \ldots$ on aura

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Tx + V =$$
$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)\ldots.$$

Si on prend la fonction prime des logarithmes des deux membres de cette équation, on aura, en faisant attention que le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs,

$$\frac{mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + \ldots. 2Sx + T}{x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots \ldots + Tx + V} =$$
$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} + \text{etc.};$$

or

$$\frac{1}{x-a} = x^{-1} + ax^{-2} + a^2x^{-3} + a^3x^{-4} + \ldots\ldots$$

si dans cette équation on change successivement a en $b, c, d, \ldots$ on aura une suite d'autres

quotiens dont la somme sera égale à

$$mx^{-1} + S_1 x^{-2} + S_2 x^{-3} + S_3 + x^{-4} + \ldots$$

S_1, S_2, S_3,..... exprimant respectivement, les sommes des premières, secondes, troisièmes, etc. puissances des racines, par conséquent on aura

$$\frac{mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + \ldots + 2Sx + T}{x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Tx + V} =$$

$$mx^{-1} + S_1 x^{-2} + S_2 x^{-3} + S_3 x^{-4} + \text{etc.}$$

faisant disparaître les dénominateurs de cette équation, on en aura une autre qui donnera, en comparant les coefficiens des mêmes puissances de x, des équations qui se réduiront en transportant les termes dans un seul membre, à

$$S_1 + A = 0$$
$$S_2 + AS_1 + 2B = 0$$
$$S_3 + AS_2 + BS_1 + 3C = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces formules ont déjà été données à l'article 61, mais il est un moyen de les obtenir qui me paraît beaucoup plus simple, et que par cette raison il ne sera pas inutile d'exposer.

289. Pour abréger le discours, nous conviendrons de représenter par $f.abcd...$ la somme des

produits différens qu'on peut former avec les les lettres $abcd\ldots$ en les prenant n à n, et par $f_n(a)\,bcd\ldots\ldots$ les produits n à n dans lesquels la lettre a se trouve; cela posé, il est clair qu'on a

$$a^n = a^{n-1} f_1\, abcd\ldots. - a^{n-2} f_2\,(a)\, bcd\ldots.$$

puisque le produit de a^{n-1} par $a+b+c+d+\ldots$ surpasse a^n du produit de a^{n-1} par $b+c+d+\ldots$ c'est-à-dire de celui de a^{n-2} par $ab+ac+ad+\ldots$; mais on a

$$a^{n-2} f_2(a)\, bcd\ldots = a^{n-2} f_2 abcd\ldots - a^{n-3} f_3(a)\, bcd\ldots.$$
$$a^{n-3} f_3(a)\, bcd\ldots = a^{n-3} f_3 abcd\ldots - a^{n-4} f_4(a)\, bcd\ldots.$$
$$a^{n-4} f_4(a)\, bcd\ldots = a^{n-4} f_4 abcd\ldots - a^{n-5} f_5(a)\, bcd\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ces équations combinées avec la première, donnent par une suite de substitutions

$$a^n = a^{n-1} f_1\, abcd - a^{n-2} f_2\, abcd + a^{n-3} f_3\, abcd - a^{n-4} f_4\, abcd + \ldots\ldots\ldots \pm f_n\, abcd.$$

Si dans cette équation on change successivement a en b, c, d, on aura une suite d'autres équations qui, étant ajoutées ensemble et avec celle-ci, donneront

$$a^n + b^n + c^n \ldots = (a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} + \ldots)\, f_1\, abcd\ldots -$$
$$(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2} + \ldots)\, f_2\, abcd + \ldots. \pm n f_n\, abcd.$$

Le dernier terme de cette équation est ... $nf_n abcd....$, parce que $f_n(a)bcd....$ étant parmi la somme des produits n à n, qu'on peut former avec toutes les lettres $a, b, c, d...$ ceux dans lesquels la lettre a se trouve, si on change cette lettre successivement dans chacune des autres, et réciproquement, on aura la somme de tous les produits n à n répétée autant de fois qu'ils contiennent de lettres, c'est-à-dire n fois. Si le nombre n est égal ou plus grand que celui des lettres, il est clair que le dernier terme de la suite sera $mf_n abcd....$, m exprimant le nombre des lettres; si on remplace les sommes des produits des lettres prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc., par les coefficiens du polynome proposé, on aura, pour déterminer les sommes des puissances des racines en fonction de ses coefficiens, les équations suivantes,

$$S_1 + A = 0$$
$$S_2 + AS_1 + 2B = 0$$
$$S_3 + AS_2 + BS_1 + 3C = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui sont les mêmes que celles que nous avons déjà trouvées par d'autres moyens.

Développement en séries des sinus et cosinus d'un arc exprimé par les puissances de cet arc.

290. Désignons par x un arc, son sinus sera une certaine fonction de cet arc et une fonction qui devient nulle, quand on y fera $x=0$, puisque le sinus et l'arc doivent s'évanouir en même temps; par conséquent le développement du sinus en série, ne doit contenir que l'arc, ne doit contenir que des puissances positives de cet arc; si on le conçoit ordonné par rapport aux puissances croissantes de cet arc, on aura

$$\sin x = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \text{etc.}$$

Or le premier des exposans de x, dans le second membre, ne peut être plus grand que l'unité; car si le contraire avait lieu, le second membre étant divisé par x, ne contiendrait que des puissances positives de x, et à mesure que l'arc s'approcherait de zéro, le second membre irait continuellement en diminuant; donc le rapport du sinus à l'arc irait aussi toujours en diminuant, à mesure que l'arc irait en décroissant; tandis qu'au contraire

ce rapport va continuellement en augmentant à mesure que l'arc diminue; de plus, l'exposant de x, dans le premier terme, ne peut être plus petit que l'unité, sans quoi le second membre divisé par x, contiendrait au moins un terme affecté d'un exposant négatif; ainsi ce second membre pourrait croître indéfiniment jusqu'à surpasser toute grandeur donnée, en prenant l'arc x suffisamment petit; donc aussi le rapport du sinus à l'arc pourrait croître indéfiniment, et par suite surpasser l'unité, ce qui est absurde; ainsi cet exposant ne pouvant être plus grand ni plus petit que l'unité, il lui sera nécessairement égal; de plus, on doit avoir $A = 1$; car la quantité A étant le terme indépendant de x, dans l'expression de $\frac{\sin x}{x}$, elle doit être égale à la quantité vers laquelle tend continuellement la valeur de $\frac{\sin x}{x}$, à mesure que x diminue; or $\frac{\sin x}{x}$ est plus petit que 1, puisque l'arc est toujours plus grand que le sinus; de plus $\frac{\sin x}{x}$ est plus grand que $\frac{\sin x}{\text{tang } x}$, c'est-à-dire, plus grand que cos x; et, comme cette dernière quantité s'approche toujours de l'unité, à mesure que x diminue, il en résulte

que $\frac{\sin x}{x}$ tend continuellement vers l'unité; d'où il suit qu'on doit avoir $A = 1$, par conséquent

$$\sin x = x + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \text{etc.}$$

Il ne reste plus maintenant à déterminer que les exposans $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ ainsi que les coefficiens B, C, D, ... qui sont indépendans de x.

291. Si on substitue $x + i$ au lieu de x, dans les deux membres de cette équation, le second membre sera identiquement le même que celui qu'on obtiendrait, si ayant les valeurs de $\sin x$, $\sin i$, $\cos x$, $\cos i$, on les substituait dans l'expression $\sin x \cos i + \sin i \cos x$; par conséquent le coefficient de la première puissance de i, dans le résultat de la première substitution, sera égal au coefficient de la même puissance de i, dans celui de la seconde; or le terme $\sin x \cos i$ ne peut contenir de première puissance de i, puisque $\cos i$ qui est égal à $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} i$, ne peut avoir de puissances de i inférieures à la seconde; ainsi le seul terme $\sin i \cos x$ en donnera un dont le coefficient sera évidemment $\cos x$; de plus, on sait

que

que pour obtenir celui qui résulte de la substitution de $x + i$ à la place de x dans le second membre, il faut multiplier chaque terme par l'exposant de x et diminuer cet exposant d'une unité, on aura donc

$$\cos x = 1 + \beta x^{\beta-1} + \gamma C x^{\gamma-1} + \delta D x^{\delta-1} + \text{etc.}$$

substituant dans cette égalité $x + i$ pour x, et prenant de part et d'autre le coefficient de la première puissance de i, on aura l'équation suivante

$$-\sin x = \beta.\beta-1 B x^{\beta-2} + \gamma.\gamma-1 C x^{\gamma-2} + \delta.\delta-1 C x^{\delta-2} + \text{etc.}$$

puisque des deux termes

$$\cos x \cos i - \sin x \sin i$$

il n'y a que le second qui puisse donner un terme affecté de la première puissance de i, et que ce terme est $-i \sin x$: comparant le second membre de cette équation, après avoir changé les signes, avec la première expression de sinus x, on aura, en observant que les exposans des termes de même rang doivent être égaux ainsi que leurs coefficiens, les équations suivantes :

Entre les exposans,	Entre les coefficiens,
$\alpha - \alpha = 1$	$-\beta.\beta - 1$ B $= 1$
$\gamma - \alpha = \beta$	$-\gamma.\gamma - 1$ C $=$ B
$\delta - \alpha = \gamma$	$-\delta.\delta - 1$ D $=$ C
.....	.....

des premières, qui sont relatives aux exposans, on tire $\beta = 3$, $\gamma = 5$, $\delta = 7$, etc.; des secondes qui établissent la relation qui existe entre les coefficiens, on déduit, après les substitutions convenables,

$$B = -\frac{1}{2.3}, \quad C = \frac{1}{2.3.4.5}, \quad D = -\frac{1}{2\ldots7}, \text{ etc.}$$

portant les valeurs de ces coefficiens dans les séries qui donnent les valeurs de $\sin x$ et de $\cos x$, on aura

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2\ldots7} + \text{etc.}$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2\ldots6} + \text{etc.}$$

séries dont la découverte est due à Newton.

292. De ce qu'on vient de trouver, il résulte que si dans $\sin x$ on substitue $x+i$ au lieu de x, le coefficient de la première puissance de i est égal à $\cos x$, et que si, dans $\cos x$, on fait la même substitution, le coefficient de la même puissance de i est égal à $-\sin x$; *par conséquent la fonction prime du sinus exprime*

en fonction de l'arc, est égale au cosinus de ce même arc, et la fonction prime du cosinus exprimé en fonction de l'arc, est égale au sinus de cet arc pris négativement.

293. Pour obtenir la fonction prime de sin p, et de cos p, lorsque p désigne une fonction quelconque de x, il faut considérer que si p prenait un accroissement i, les termes affectés de la première puissance de cet accroissement, dans $\sin(p+i)$ et $\cos(p+i)$, seraient respectivement $i\cos p$ et $-i\sin p$; mais si l'accroissement i, au lieu de se rapporter à p, se rapportait à x, il faudrait à i, dans ce qui précède, substituer l'accroissement correspondant de p, lequel est égal à $ip'+$ etc.; si on fait cette substitution, et que l'on ne conserve que ce qui multiplie la première puissance de i, on trouvera que la fonction prime de $\sin p$ est $p'\cos p$, et que celle de $\cos p$ est $-p'\sin p$; par conséquent la *fonction prime du cosinus d'un arc est égale au produit du sinus de cet arc, multiplié par la fonction prime de l'arc, et la fonction prime du cosinus d'un arc est égale au produit du sinus de l'arc par la fonction prime de cet arc, pris négativement.*

Développement de l'arc en fonction du sinus de cet arc.

294. Quel que soit le développement de l'arc en fonction du sinus, il ne peut contenir aucun terme constant, puisqu'il doit s'évanouir quand on y suppose l'arc nul. De plus il ne doit contenir que des puissances impaires du sinus, car il doit changer de signe sans changer de grandeur, lorsque l'arc, sans changer de grandeur, change de signe; si donc on désigne par x l'arc dont le sinus est s, on aura

$$x = As + Bs^3 + Cs^5 + Ds^7 + \text{etc.};$$

si on substitue $x + i$ au lieu de x, il faudra remplacer la quantité s par $s + is' + \text{etc.}$; si donc on compare le coefficient de la première puissance de i dans le premier et le second membre, on aura

$$1 = As' + 3Bs^2s' + 5Cs^4s' + 7Ds^6s' + \text{etc.};$$

or s représentant $\sin x$, s' représentera $\cos x$, puisque la fonction prime du sinus est égale au cosinus; ainsi on aura, en divisant les deux membres par s', et en remplaçant s' par $\cos x$, ou $\sqrt{1-s^2}$, l'équation

$$\{1 - s^2\}^{-\frac{1}{2}} = A + 3Bs^2 + 5Cs^4 + 7Ds^6 + \text{etc.};$$

si on développe le premier membre de cette équation, on aura

$$1+\frac{1}{2}s^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}s^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}s^6+\text{etc.}=$$
$$A+3Bs^2+5Cs^4+7Ds^6+\text{etc.};$$

comparant les coefficiens des puissances semblables de s, on aura une suite d'équations desquelles on tirera les valeurs de A, B, C, D....; si on les porte dans l'équation qui donne la valeur de x, on aura

$$x=s+\frac{1}{2}\cdot\frac{s^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{s^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{s^7}{7}+\text{etc.}$$

formule due à Newton.

295. De cette formule il résulte que si on suppose un accroissement i au sinus s, le terme affecté de la première puissance de i est égal à $\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$; par conséquent *la fonction prime de l'arc exprimé en fonction du sinus est égale à l'unité divisée par le cosinus.*

296. Si on substitue $\frac{\pi}{2}-x$, au lieu de x, dans la série de l'arc par le sinus, on en déduira l'expression de l'arc par le cosinus, et on trou-

vera que *la fonction prime de l'arc exprimé par le cosinus, est égale à l'unité prise en moins, et divisée par le sinus.*

Développement du carré de l'arc en fonction des puissances du sinus de cet arc.

297. L'expression de la seconde puissance d'un arc devant convenir à toutes les valeurs de l'arc, il faudra qu'elle devienne nulle avec lui; par conséquent elle ne pourra contenir aucun terme indépendant du sinus; de plus, comme la seconde puissance de l'arc ne change ni de signe ni de grandeur, lorsque le sinus, sans changer de grandeur, change de signe, il en résulte que le carré de l'arc exprimé en fonction du sinus, ne peut contenir que des puissances paires de ce même sinus; si donc on représente les coefficiens des puissances paires de ce sinus par A, B, C, etc., on aura, en désignant par x l'arc, et par s son sinus,

$$x^2 = As^2 + Bs^4 + Cs^6 + \text{etc.};$$

si on représente le second membre par y, on aura, en dérivant l'équation par rapport à s,

$$2xx' = y';$$

si on substitue pour x' sa valeur $\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$, on

aura une équation qui étant élevée au carré, donnera, à cause de $x^2 = y$,

$$\frac{4y}{1-s^2} = y'^2;$$

faisant disparaître les dénominateurs, et prenant la fonction prime des deux membres, on aura une équation qui étant divisée par $2y'$, donnera

$$y''(1-s^2) - sy' - 2 = 0;$$

mais de l'équation

$$y = As^2 + Bs^4 + Cs^6 + \text{etc.},$$

on tire successivement

$$y' = 2As + 4Bs^3 + 6Cs^5 + \ldots.$$
$$y'' = 2A + 3.4Bs^2 + 5.6Cs^4 + \ldots.;$$

si on porte dans l'équation dérivée du second ordre pour y' et y'' leurs valeurs en séries, on aura

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|c|} 2A & +3.4B & s^2 + 5.6C & s^4 + 7.8D \\ - & 2A & -3.4B & -5.6C \end{array}\right| \left.\begin{array}{|c|} s^6 + \ldots \\ -\ldots \end{array}\right\} =$$
$$2 + 2As^2 + 4Bs^4 + 6Cs^6 + \ldots$$

Cette équation peut se partager en autant d'autres équations qu'il y a de puissances de z, lesquelles serviront à déterminer les coefficiens,

et à établir la loi de leur dépendance mutuelle; ces équations sont :

$$2A = 2 \; ; \; 3.4B = 4A$$
$$5.6C = 4^2B \; ; \; 7.8D = 6^2C$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de ces équations on en déduit successivement

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{4},$$

$$D = \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}, \text{ etc.}$$

si on porte ces valeurs dans l'expression de x^4, on aura

$$x^4 = s^4 + \frac{s^4}{4} + \frac{4 \cdot s^6}{3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 6 \cdot s^8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} + \text{etc.}$$

Liaison des exponentielles imaginaires avec les fonctions angulaires, formules qui en résultent.

298. Nous avons vu qu'en ajoutant ensemble les développemens de e^x et de e^{-x}, on avait

$$e^x + e^{-x} = 2\left\{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right\}.$$

Si on compare l'expression qui est dans la parenthèse, avec celle qui est le développement de $\cos x$, on verra qu'on passera de l'une à

l'autre, en changeant x^2 en $-x^2$, ou, ce qui revient au même, x en $x\sqrt{-1}$; si donc on fait ce changement dans la première formule, on aura

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x.$$

299. On a vu aussi qu'en retranchant le développement de e^{-x} de celui de e^x, on avait

$$e^x - e^{-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \text{etc.}\right\}.$$

Si on compare le facteur qui dans le second membre est compris dans la parenthèse avec le développement du sinus, on verra qu'on passera du développement de $e^x - e^{-x}$ à celui du sinus de l'arc x, en changeant x^2 en $-x^2$, ou x en $x\sqrt{-1}$, et divisant le tout par $2\sqrt{-1}$; de sorte qu'on aura

$$e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\,.\,\sin x.$$

300. Si on ajoute ensemble les deux équations qui terminent les deux articles précédens, on aura une équation qui étant divisée par 2, donnera

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,.\,\sin x;$$

301. Si on prend le radical en moins, ce qui revient à retrancher les mêmes équations l'une de l'autre, on aura

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,.\,\sin x.$$

302. Ces résultats nous montrent que quoique les exponentielles imaginaires prises isolément ne puissent être représentées par aucune quantité réelle, néanmoins il faut se garder de les rejeter du calcul, puisqu'en les combinant convenablement soit entr'elles ou avec d'autres, on tombe sur des quantités réelles; de plus il était nécessaire de les y introduire, afin de remplir entre les grandeurs la lacune que laissait la somme de deux quantités exponentielles réciproques, puisque la somme de deux quantités exponentielles réciproques et imaginaires peut représenter tous les nombres au-dessous de 2, et que la somme des deux quantités exponentielles réelles et réciproques peut donner tous les nombres qui sont au-dessus; mais il ne faut point perdre de vue que les exponentielles imaginaires ne représentent rien autre chose qu'un symbole qui tient lieu de toute la série qu'on obtiendrait, si on développait les exponentielles imaginaires de la même manière que si elles étaient réelles, en ayant égard aux règles établies en algèbre sur les quantités imaginaires, et que c'est d'après cette convention et la correspondance qui existe entre le développement des exponentielles imaginaires et celui des sinus et des

cosinus, qu'on a

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x.$$

303. L'équation précédente qui est si remarquable par sa fécondité et par son usage dans toute l'analyse, peut s'obtenir immédiatement sans recourir à la comparaison des séries des exponentielles avec celles qui donnent les sinus et les cosinus, ce qui fournit un nouveau moyen d'obtenir ces dernières séries.

304. Pour y arriver, remplaçons x dans le développement de e^x par $x\sqrt{-1}$, nous aurons un résultat qui sera composé de deux sortes de termes; les uns seront réels et les autres imaginaires : si on représente la somme des premiers par M, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la somme des autres par N, on aura

$$e^{x\sqrt{-1}} = M + N\sqrt{-1};$$

si dans cette équation on change x en $-x$, on aura un résultat qui ne différera du précédent que par le signe de la partie imaginaire, de sorte qu'on aura

$$e^{-x\sqrt{-1}} = M - N\sqrt{-1},$$

multipliant entr'elles ces deux équations membre à membre, on aura

$$1 = M^2 + N^2;$$

or la somme des carrés des quantités réelles M et N ne peut être égale à l'unité, à moins que chacune d'elles ne soit moindre que 1; si donc on désigne par φ l'angle dont le cosinus est M, le sinus du même angle sera représenté par N, et on aura

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi,$$

de cette équation on tire

$$e^{\frac{\varphi}{x}\sqrt{-1}} = \cos\frac{\varphi}{x} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{\varphi}{x};$$

or le premier membre de cette équation est indépendant de x, le second membre doit donc aussi en être indépendant; et comme aucuns des termes du développement de $\sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{\varphi}{x}$, ne peuvent être détruits par ceux de $\cos\frac{\varphi}{x}$, il faut que $\frac{\varphi}{x}$ soit constant, ce qui exige qu'on ait $\varphi = kx$, k étant une constante qu'il faut déterminer; si dans l'équation

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi,$$

on remplace φ par kx, on aura

$$e^{kx\sqrt{-1}} = \cos kx + \sqrt{-1}\,.\,\sin kx;$$

pour déterminer k, changeons dans cette équation x en $\frac{x}{k}$, on aura

$$e^{\frac{x}{k}\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x.$$

Si au premier membre de cette équation on substitue son expression en série, on aura, en observant que le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le second membre est égal à $\sin x$

$$\frac{x}{k} - \frac{x^3}{2 \cdot 3 k^3} + \text{etc.} = \sin x.$$

Si on divise les deux membres de cette dernière équation par x, on en aura une autre dans laquelle la limite du premier membre sera égale à celle du second; or celle-ci est égale à l'unité, ainsi celle du premier membre qui est exprimée par $\frac{1}{k}$ est aussi égale à 1; ce qui exige qu'on ait $k = 1$; par conséquent

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x,$$

formule qui est la même que celle que nous avons déduite plus haut de la comparaison du développement des exponentielles avec les développemens du sinus et du cosinus.

305. Si on développe en séries le premier

membre de cette équation, on aura, à cause que la partie réelle du premier membre est égale à la partie réelle du second, et que la partie imaginaire est égale dans les deux membres, les deux équations suivantes :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2...5} - \frac{x^7}{2...7} + \text{etc.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2...4} - \frac{x^6}{2...6} + \text{etc.}$$

formules connues et qu'on a déjà trouvées plus haut § 291.

306. Si dans l'équation

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x,$$

on remplace x par $2k\pi$, k étant un nombre entier quelconque, on aura

$$e^{2k\pi\sqrt{-1}} = \cos 2k\pi + \sqrt{-1}\,.\,\sin 2k\pi = 1,$$

de cette équation on tire, en prenant les logarithmes népériens des deux membres,

$$l.\ 1 = 2k\pi\sqrt{-1};$$

par conséquent l'unité a un nombre infini de logarithmes dont un seul est réel et égal à zéro, et tous les autres sont imaginaires.

307. Non-seulement l'unité a un nombre infini de logarithmes, mais un nombre quelconque

en a aussi une infinité ; en effet, si x est le logarithme tabulaire d'un nombre y, on aura

$$y = e^x = e^{x+2k\pi\sqrt{-1}},$$

puisque

$$e^{2k\pi\sqrt{-1}} = 1 ;$$

par conséquent on aura

$$ly = x + 2k\pi\sqrt{-1} ;$$

d'où l'on voit que le logarithme d'un nombre positif a une infinité de logarithmes parmi lesquels un seul est réel, et tous les autres sont imaginaires.

508. Pour avoir le logarithme de -1, il faut substituer dans l'équation

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x ,$$

au lieu de x un nombre impair de demi-circonférence, ou $(2k+1)\pi$; par cette substitution on a

$$e^{(2k+1)\pi\sqrt{-1}} =$$

$$\cos(2k+1)\pi + \sqrt{-1} \cdot \sin(2k+1)\pi = -1 ;$$

prenant les logarithmes népériens des deux membres, on a

$$l(-1) = (2k+1)\pi\sqrt{-1} ;$$

ainsi les logarithmes de -1, et par suite ceux de tous les nombres négatifs, sont imaginaires.

La question des logarithmes des quantités négatives fut très-agitée entre Leibnitz et Jean Bernoulli; ce dernier soutenait que les logarithmes des quantités négatives étaient réels; pour le faire voir, il partait de l'équation... $(-1)^2=(1)^2$; donc disait il $l.(-1)^2=l.(1)^2$, ou $2l.(-1)=2l.1$, ou enfin $l.(-1)=l.1$; mais il est clair que quoique l'équation primitive soit exacte, la conclusion qu'il en tirait ne l'était pas; car l'égalité de deux puissances n'entraînant pas celle de leurs racines, il n'en pouvait conclure que les logarithmes de ces racines étaient égaux, aussi la difficulté ne resta pas long-temps sans réplique; Euler qui prit part à la discussion de cette question, adopta l'opinion de Leibnitz qui croyait que les logarithmes des quantités négatives étaient imaginaires, et c'est à lui à qui l'on doit la démonstration qu'on a rapportée ci-dessus.

309. De l'équation $L-1=(2k+1)\pi\sqrt{-1}$, on tire une valeur singulière de la demi-circonférence; car si on y fait $k=0$, on a

$$\pi=\frac{l-1}{\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}\,.\,l-1.$$

Si

310. Si dans la formule

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x,$$

on change x en $\frac{\pi}{2}$, on aura, en prenant les logarithmes népériens de part et d'autre,

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = l.\sqrt{-1},$$

d'où

$$\pi = \frac{2\, l.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}},$$

formule due à Leibnitz et qui revient à la première.

311. Pour obtenir les logarithmes d'une quantité en partie réelle et en partie imaginaire, telle que $a+b\sqrt{-1}$, il faut mettre cette quantité sous la forme

$$\sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\},$$

puis faire

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi;$$

mais de cette équation il résulte

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi;$$

par conséquent

$$a+b\sqrt{-1} = \sqrt{a^2+b^2}\{\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi\};$$

si on représente le logarithme tabulaire de $\sqrt{a^2+b^2}$ par x, on aura $\sqrt{a^2+b^2}=e^x$, d'ailleurs

$$\cos\varphi+\sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi=e^{\varphi\sqrt{-1}}=e^{(2k\pi+\varphi)\sqrt{-1}},$$

ainsi

$$a+b\sqrt{-1}=e^{x+(2k\pi+\varphi)\sqrt{-1}};$$

si on prend les logarithmes népériens des deux membres, on aura

$$l.\{a+b\sqrt{-1}\}=x+(2k\pi+\varphi)\sqrt{-1};$$

or, quel que soit le nombre k, comme il est entier, la partie qui est dans la parenthèse ne sera jamais nulle, lorsqu'aucunes des quantités a et b ne seront nulles; par conséquent le logarithme d'une quantité de la forme $a+b\sqrt{-1}$ est encore de la même forme, et il est égal à la moitié du logarithme de la somme des carrés de la partie réelle et de la partie imaginaire, plus $\sqrt{-1}$ multiplié par l'arc dont le cosinus est..... $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, ou, ce qui revient au même, par l'arc dont la tangente est $\frac{b}{a}$.

312. On peut aussi démontrer que toute quantité de la forme $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ est aussi de la forme $p+q\sqrt{-1}$; en effet, si x est le logarithme népérien de $\sqrt{a^2+b^2}$, et φ l'arc

dont la tangente est $\frac{b}{a}$, on aura

$$a+b\sqrt{-1}=e^{x}\{\cos\varphi+\sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi\}=e^{x+\varphi\sqrt{-1}};$$

par conséquent

$$\{a+b\sqrt{-1}\}^{m+n\sqrt{-1}}=$$

$$e^{(x+\varphi\sqrt{-1})(m+n\sqrt{-1})}=e^{mx-n\varphi}\,.\,e^{(m\varphi+nx)\sqrt{-1}}=$$

$$e^{mx-n\varphi}\,.\,\{\cos(m\varphi+nx)+\sqrt{-1}\sin(m\varphi+nx)\};$$

si on fait

$$e^{mx-n\varphi}\cos(m\varphi+nx)=p$$

$$e^{mx-n\varphi}\sin(m\varphi+nx)=q;$$

on aura

$$\{a+b\sqrt{-1}\}^{m+n\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1}.$$

313. La facilité avec laquelle les exponentielles peuvent être soumises au calcul, et la liaison qui règne entre les exponentielles imaginaires et les quantités angulaires, donnent lieu à un grand nombre de formules dont l'usage est très-étendu dans toute l'analyse; nous allons nous attacher à faire connaître les principales.

314. Si on élève les deux membres de l'équation

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}\,.\,\sin x$$

à la puissance m on aura

$$e^{mx\sqrt{-1}}=(\cos x+\sqrt{-1}\,.\,\sin x)^{m};$$

mais en vertu de la première équation on a

$$e^{mx\sqrt{-1}}=\cos mx+\sqrt{-1}\,.\,\sin mx,$$

ainsi on aura, quel que soit le nombre m, la formule suivante

$$\{\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x\}^m = \cos mx + \sqrt{-1} \cdot \sin mx;$$

cette formule aussi remarquable par son élégance que par sa fécondité, est connue sous le nom de *formule de Moivre*, parce que ce géomètre célèbre est le premier qui l'ait remarquée.

315. Si on prend dans la dernière équation, chaque radical en moins, ce qui revient à faire sur l'équation

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \{\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x\}$$

les mêmes opérations que celles que nous avons faites sur la première, on aura

$$\{\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x\}^m = \cos mx - \sqrt{-1} \cdot \sin mx.$$

316. Si on combine par voie d'addition et de soustraction les équations qui terminent les deux numéros précédens, on trouvera successivement

$$2 \cos mx =$$
$$\{\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x\}^m + \{\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x\}^m$$
$$2\sqrt{-1} \cdot \sin mx =$$
$$\{\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x\}^m - \{\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x\}^m$$

317. Si on développe les binomes qui composent les seconds membres de ces deux équations, on en déduira que cos mx est égal à la somme des termes réels du développement de

$$\{\cos x + \sqrt{-1}\,.\,\sin x\}^m,$$

et que sin mx est égal à tout ce qui multiplie $\sqrt{-1}$ dans le même développement; ainsi on aura pour déterminer les sinus et cosinus des arcs multiples en fonction des produits des puissances des sinus et des cosinus de l'arc simple, les formules suivantes :

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m-1}{2}\cos^{m-2}x\sin^2 x + \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3}{2\,.\,3\,.\,4}\cos^{m-4}x\sin^4 x - \text{etc.}$$

et

$$\sin mx = m\cos^{m-1}x\sin x - \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{2\,.\,3}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \text{etc.},$$

lesquelles ont lieu, quel que soit le nombre m.

318. Si on divise la seconde des équations du paragraphe antéprécédent par la première, on aura une équation dont le second membre sera une fraction qui donnera, en divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos^m x$, la tangente d'un arc multiple, en fonction de la

tangente de l'arc simple ; cette équation sera

$$\text{tang } mx = \frac{\{1+\sqrt{-1}\,.\,\text{tang } x\}^m + \{1-\sqrt{-1}\,.\,\text{tang } x\}^m}{\{1+\sqrt{-1}\,.\,\text{tang } x\}^m - \{1-\sqrt{-1}\,.\,\text{tang } x\}^m},$$

ou en développant les puissances indiquées, et désignant pour abréger tang.x par t,

$$\text{tang } mx = \frac{mt - \frac{m.m-1.m-2}{2.3}t^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{2.3.4.5}t^5 - \text{etc}}{1 - \frac{m.m-1}{2}t^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}t^4 - \text{etc.}}$$

formule qui a lieu quel que soit le nombre m, et qui peut s'obtenir facilement en divisant le développement de sin mx que nous avons donné ci-dessus par celui de cos mx.

Les formules que nous venons de donner pour cos mx, sin mx et tang mx, peuvent encore se tirer facilement, lorsque le nombre m est entier, des formules qui donnent les cosinus, les sinus et les tangentes de la somme d'un nombre quelconque d'arcs ; comme ces dernières formules peuvent s'obtenir fort aisément, nous allons nous y arrêter un instant.

Démonstration des formules qui donnent les sinus, les cosinus et les tangentes de la somme d'un nombre quelconque d'arcs.

319. Pour arriver à ces formules de la manière la plus simple, nous considérerons le produit des facteurs

$$\cos a + \sqrt{-1}\,.\sin a,\ \cos b + \sqrt{-1}\,.\sin b,$$
$$\cos c + \sqrt{-1}\,.\sin c, \ldots\ldots$$

ce produit, ainsi qu'on le sait, est égal à

$$\cos(a+b+c+\ldots.) + \sqrt{-1}\sin(a+b+c\ldots.)$$

ainsi le coefficient de $\sqrt{-1}$, dans le produit des facteurs dont il s'agit, sera égal à.... $\sin(a+b+c\ldots)$, et le terme indépendant de $\sqrt{-1}$ sera égal à $\cos(a+b+c\ldots)$; si on divise le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le produit des facteurs

$$(\cos a + \sqrt{-1}\,.\sin a)\,(\cos b + \sqrt{-1}\,.\sin b),\ldots$$

par la somme des termes indépendans de $\sqrt{-1}$, on aura la tangente de la somme de tous les arcs a, b, c, d....

Pour trouver la loi des termes du produit des facteurs que l'on considère, nous divise-

rons chacun d'eux par son premier terme, et nous multiplierons le produit de tous les facteurs ainsi divisés, par le produit de ces premiers termes, ce qui donnera

$$\cos(a+b+c+d\ldots)+\sqrt{-1}.\sin(a+b+c+d\ldots)=$$
$$\cos a\cos b\cos c\cos d\ldots\{1+\sqrt{-1}.\operatorname{tang} a\}$$
$$\{1+\sqrt{-1}.\operatorname{tang} b\}\{1+\sqrt{-1}.\operatorname{tang} c\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

or la somme des termes réels dans le produit des facteurs binomes est égale à l'unité, moins la somme des produits deux à deux des tangentes de tous les arcs, plus la somme des produits quatre à quatre des tangentes de ces mêmes arcs, et ainsi de suite; si donc on multiplie tous les termes de ce produit par le produit des cosinus de tous les arcs, et qu'on observe que le produit des tangentes de plusieurs arcs, multiplié par le produit des cosinus de ces arcs, est égal au produit des sinus des mêmes arcs, on trouvera que le cosinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs est égal au produit des cosinus de ces arcs, moins la somme des produits deux à deux des sinus de ces arcs par les cosinus des autres arcs, plus la somme des produits quatre à quatre des sinus de ces arcs par les produits

es cosinus des autres arcs, et ainsi de suite.

320. Si on considère le coefficient de $\sqrt{-1}$ ans le produit des facteurs qui sont compris itre parenthèses, on trouvera, en le multiliant par le produit des cosinus de tous les cs, que le sinus de la somme d'un nombre uelconque d'arcs, est égal à la somme des roduits de chaque sinus par le produit des osinus des autres arcs, moins la somme des roduits trois à trois des sinus par les cosinus es autres arcs, plus tous les produits cinq à nq de ces mêmes sinus par les cosinus des itres arcs, et ainsi de suite.

321. Les termes réels et imaginaires du proit des facteurs binomes qui se trouvent dans second membre de cette équation, étant mulpliés par cos a cos b cos c cos d,... ce facur disparaîtra par la division des premiers ar les seconds, de sorte qu'on trouvera que ng $(a+b+c+d....)$ sera égale à la omme des termes qui multiplient $\sqrt{-1}$ dans produit de

$$\{1+\sqrt{-1}.\text{tang}a\}\{1+\sqrt{-1}.\text{tang}b\}\{1+\sqrt{-1}.\text{tang}c\}$$

ivisée par la somme des termes qui ne sont as multipliés par $\sqrt{-1}$; or la somme des

premiers est égale à la somme des tangentes, moins tous les produits trois à trois de ces tangentes, plus tous les produits cinq à cinq, et ainsi de suite, et la somme des seconds est égale à l'unité, moins tous les produits deux à deux des tangentes, plus tous les produits quatre à quatre et ainsi de suite; par conséquent la tangente de la somme de tant d'arcs qu'on voudra, est égale à la somme des tangentes, moins tous les produits trois à trois de ces tangentes, plus tous les produits cinq à cinq et ainsi de suite, le tout divisé par l'unité, moins tous les produits deux à deux de ces tangentes, plus tous les produits quatre à quatre, et ainsi de suite.

322. Si dans les formules qui donnent les sinus, les cosinus et les tangentes de la somme d'un nombre quelconque d'arcs, on suppose que tous ces arcs soient égaux entr'eux, et à a, on aura celles qui donnent les sinus, les cosinus et les tangentes des arcs multiples, lesquelles ont été données pour la première fois par Jean Bernoulli.

323. Les formules qui donnent les sinus et les cosinus d'un arc en fonction des exponentielles imaginaires, fournissent un moyen très-

simple d'obtenir celles qui donnent les puissances des sinus et des cosinus de cet arc en fonction des sinus et des cosinus des arcs multiples ; c'est ce qu'il est facile de voir, car si on élève les deux membres de l'équation

$$2\cos x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

à la puissance m et qu'on développe le second membre, on aura

$$(2\cos x)^m =$$

$$e^{mx\sqrt{-1}} + me^{(m-2)x\sqrt{-1}} + \frac{m.m-1}{2}e^{(m-4)x\sqrt{-1}} + \text{etc.} ;$$

mais on a

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \cos mx + \sqrt{-1}\,.\,\sin mx$$

$$e^{(m-2)x\sqrt{-1}} = \cos(m-2)x + \sqrt{-1}\,.\sin(m-2)x$$

$$e^{(m-4)x\sqrt{-1}} = \cos(m-4)x + \sqrt{-1}\,.\sin(m-4)x$$

.....

si donc on substitue dans le second membre de l'équation qui précède ces dernières, pour les exponentielles imaginaires leurs expressions en fonctions angulaires, on aura

$$(2\cos x)^m =$$

$$\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x + \text{etc.}$$

$$+\sqrt{-1}\left\{\sin mx + m\sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x + \text{etc.}\right\}$$

si on suppose que m soit un nombre entier et positif, les deux séries qui composent le second membre de cette dernière équation sont terminées; et comme les derniers termes de la seconde suite, ainsi que ceux qui sont également éloignés des derniers termes dans cette première suite, sont égaux et de signes contraires, il en résulte que les termes de la seconde suite se détruisent mutuellement, et qu'il ne reste que ceux de la première, de sorte qu'on a simplement

$$(2\cos x)^m =$$

$$\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x + \text{etc.};$$

Mais si le nombre m est négatif ou fractionnaire, les deux séries ne s'arrêtent point, et comme l'une d'elles est réelle et que l'autre est imaginaire, il semblerait qu'excepté le cas de m entier et positif, la seconde série est nécessaire pour avoir le développement complet de $(2\cos x)^m$, lors même qu'on sait que cette expression doit être réelle. Cette singularité tient à ce que dans le développement des puissances, on ne tient aucun compte des fonctions qui servent à compléter les termes auxquels on s'arrête; car si on y avait égard,

tous les termes de la seconde suite se détruiraient, de manière qu'il ne resterait que des quantités réelles; c'est ce dont on peut se convaincre facilement.

324. Pour obtenir la formule qui donne l'expression de $(2\sin x)^m$, partons de l'équation

$$2\sqrt{-1}\,.\,\sin x = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}};$$

si dans le premier membre on remplace $\sqrt{-1}$ par $\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{\pi}{2}$, on aura

$$2\sin x\left\{\cos\tfrac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\tfrac{\pi}{2}\right\} = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}};$$

si on élève les deux membres de cette équation à la puissance m, on aura

$$(2\sin x)^m\left\{\cos\frac{m\pi}{2} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{m\pi}{2}\right\} = \left\{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right\}^m;$$

si on développe le second membre, on aura

$$(2\sin x)^m\left\{\cos\frac{m\pi}{2} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{m\pi}{2}\right\} = e^{mx} - me^{(m-2)x\sqrt{-1}} + \frac{m\,.\,m-1}{2}e^{(m-4)x\sqrt{-2}} - \text{etc.};$$

si dans le second membre de cette dernière

équation, on remplace les exponentielles imaginaires par les fonctions angulaires qui leur sont équivalentes, on aura

$$(2\sin x)^m\left\{\cos\frac{m\pi}{2}+\sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{m\pi}{2}\right\}=$$

$$\cos mx-m\cos(m-2)x+\frac{m\,.\,m-1}{2}\cos(m-4)x-\text{etc.}$$

$$+\sqrt{-1}\left\{\sin mx-\sin(m-2)x+\frac{m\,.\,m-1}{2}\sin(m-4)x-\text{etc.}\right\};$$

si on multiplie les deux membres de cette équation par $\cos\frac{m\pi}{2}-\sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{m\pi}{2}$, le premier membre se réduira à $(2\sin x)^m$ et le second membre se composera de deux espèces de termes, les uns seront réels et les autres imaginaires; et comme ces derniers doivent se détruire, lorsque le nombre m est entier, puisque le premier membre est réel, il en résulte qu'on aura simplement

$$(2\sin x)^m=$$

$$\cos\frac{m\pi}{2}\left\{\cos mx-m\cos(m-2)x+\frac{m\,.\,m-1}{2}\cos(m-4)x-\text{etc.}\right\}$$

$$+\sin\frac{m\pi}{2}\left\{\sin mx-m\sin(m-2)x+\frac{m\,.\,m-1}{2}\sin(m-4)x-\text{etc.}\right\},$$

formule connue et qu'on obtient immédiatement en remplaçant x par $\frac{\pi}{2}-x$ dans celle que nous avons trouvée pour $(2\cos x)^m$.

Formules qui donnent la série de l'arc en fonction de la tangente de cet arc, et l'accroissement complet d'un arc qui correspond à un accroissement donné de la tangente.

325. Pour trouver l'arc en fonction de la tangente, reprenons la formule

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x ;$$

Si on prend les logarithmes népériens des deux membres, on aura, à cause que

$$\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x = \cos x \{ 1 + \sqrt{-1} \cdot \operatorname{tang} x \}$$

l'équation suivante

$$x\sqrt{-1} = \text{l.} \cos x + \text{l.} \{ 1 + \sqrt{-1} \cdot \operatorname{tang} x \} ;$$

si on développe l. $\{ 1 + \sqrt{-1} \cdot \operatorname{tang} x \}$, comme on développe l. $(1 + x)$, le second membre sera composé de termes multipliés par $\sqrt{-1}$, et de termes qui ne seront pas multipliés par $\sqrt{-1}$; et comme l'égalité ne pourra avoir lieu, à moins que la somme de ceux-ci ne soit nulle, et que le coefficient

de $\sqrt{-1}$, dans le premier membre, ne soit égal à tout ce qui multiplie $\sqrt{-1}$ dans le second membre, il faudra qu'on ait les deux équations

$$0 = \log.\cos x + \frac{\tang^2 x}{2} - \frac{\tang^4 x}{4} + \frac{\tang^6 x}{6} - \text{etc.}$$

$$x = \tang x - \frac{\tang^3 x}{3} + \frac{\tang^5 x}{5} - \frac{\tang^7 x}{7} + \text{etc.}$$

La première de ces deux équations donne le logarithme du cosinus d'un arc en fonction de la tangente, et la seconde détermine l'arc par la tangente.

326. On peut trouver la seconde des deux formules précédentes, en divisant membre à membre les deux équations

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x,$$

car de cette division il résulte

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1 + \sqrt{-1} \cdot \tang x}{1 - \sqrt{-1} \cdot \tang x};$$

si on prend les logarithmes des deux membres de cette équation, on tire la formule suivante:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l\left\{\frac{1 + \sqrt{-1} \cdot \tang x}{1 - \sqrt{-1} \cdot \tang x}\right\};$$

si

e cette équation on développe le second
ıbre, on aura, à cause que

$$\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.}\right\}$$

rmule dont il s'agit.

17. La formule que nous avons trouvée ci-
us et qui donne l'arc par la tangente, n'est
n cas particulier de celle qui donne l'accrois-
ent complet d'un arc en fonction de l'ac-
ssement de la tangente de cet arc et des
ıtités angulaires qui lui sont relatives; pour
ire voir, désignons par i l'accroissement de
x, et par z l'arc qui correspond à la tan-
e $i + \text{tang}\, x$, on aura, par la relation
lie § 326, entre un arc et la tangente

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log.\left\{\frac{1+\text{tang}\, z \,.\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\, z \,.\sqrt{-1}}\right\} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log.\left\{\frac{1+i\sqrt{-1}+\text{tang}\, x \,.\sqrt{-1}}{1-i\sqrt{-1}-\text{tang}\, x \,.\sqrt{-1}}\right\};$$

$$\frac{1+\text{tang}\, x \,.\sqrt{-1}+i\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\, x \,.\sqrt{-1}-i\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x + i\cos x\,.\sqrt{-1}}{\cos x - \sqrt{-1}\,.\sin x - i\cos x\,.\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\,.\sin x} \times$$

$$\frac{1+i\cos x\,.\sqrt{-1}\,(\cos x - \sqrt{-1}\,.\sin x)}{1-i\cos x\,.\sqrt{-1}\,(\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x)};$$

par conséquent

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \left\{ \frac{\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x}{\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x} \right\} +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \left\{ \frac{1 + i \cos x \sqrt{-1} (\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x)}{1 - i \cos x \sqrt{-1} (\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x)} \right\};$$

Mais le premier terme du second membre de cette dernière équation est l'expression de l'arc x; si donc on le fait passer dans le premier membre, et que pour abréger on représente $i \cos x \sqrt{-1}$ par u, et $\cos x - \sin x \sqrt{-1}$ par y, on aura, à cause de $\cos x + \sin x \sqrt{-1} = \frac{1}{y}$, l'équation

$$2\{z - x\}\sqrt{-1} = \log. \{1 + uy\} - \log. \{1 - uy^{-1}\}.$$

Si on développe le second membre et qu'on l'ordonne par rapport aux puissances de u, on aura

$$2\{z - x\}\sqrt{-1} =$$

$$+ u \left\{ y + \frac{1}{y} \right\} - \frac{u^2}{2} \left\{ y^2 - \frac{1}{y^2} \right\}$$

$$+ \frac{u^3}{3} \left\{ y^3 + \frac{1}{y^3} \right\} - \frac{u^4}{4} \left\{ y^4 - \frac{1}{y^4} \right\}$$

$$+ \frac{u^5}{5} \left\{ y^5 + \frac{1}{y^5} \right\} - \frac{u^6}{6} \left\{ y^6 - \frac{1}{y^6} \right\};$$

.....

mais si on élève à la puissance m les deux équations,

$$y = \cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x$$
$$\frac{1}{y} = \cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x,$$

on aura les deux suivantes :

$$y^m = \cos mx - \sqrt{-1} \cdot \sin mx$$
$$\frac{1}{y^m} = \cos mx + \sqrt{-1} \cdot \sin mx,$$

ajoutant et soustrayant successivement ces deux dernières équations, on aura

$$y^m + \frac{1}{y^m} = 2 \cos mx$$
$$y^m - \frac{1}{y^m} = -2\sqrt{-1} \cdot \sin mx;$$

si donc on substitue pour les diverses puissances de u qui se trouvent dans la première équation, les mêmes puissances de $i\sqrt{-1}.\cos x$, et pour leurs coefficiens les valeurs qui résultent des équations précédentes, on aura, après avoir divisé les deux membres par $\sqrt{-1}$,

$$z - x = i \cos x \cdot \cos x - \frac{i^2 \cos^2 x}{2} \sin 2x$$
$$- \frac{i^3 \cos^3 x}{3} \cos 3x + \frac{i^4 \cos^4 x}{4} \sin 4x$$
$$+ \frac{i^5 \cos^5 x}{5} \cos 5x - \frac{i^6 \cos^6 x}{6} \sin 6x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si dans cette formule on fait $x=0$, on aura

$$\text{arc tang } i = i - \frac{i^3}{3} + \frac{i^5}{5} - \frac{i^7}{7} + \text{etc.},$$

formule connue et que l'on doit à Leibnitz.

528. Si dans le second membre de l'équation

$$2x\sqrt{-1} = \log.\left\{\frac{\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\,.\sin x}\right\},$$

on remplace

$$\frac{\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\,.\sin x}$$

par

$$1 + \frac{2\sqrt{-1}\,.\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\,.\sin x},$$

ou, ce qui revient au même, par

$$1 + 2\sqrt{-1}\,.\sin x\left\{\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x\right\},$$

on aura

$$2x\sqrt{-1} = \log.\left\{1 + 2\sqrt{-1}\,.\sin x(\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x)\right\},$$

ou, en développant le second membre,

$$2x\sqrt{-1} = \frac{(2\sqrt{-1}\,.\sin x)}{1}\left\{\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x\right\}$$
$$- \frac{(2\sqrt{-1}\,.\sin x)^2}{2}\left\{\cos 2x + \sqrt{-1}\,.\sin 2x\right\}$$

$$+\frac{(2\sqrt{-1}.\sin x)^3}{3}\{\cos 3x+\sqrt{-1}.\sin 3x\}$$

$$-\frac{(2\sqrt{-1}.\sin x)^4}{4}\{\cos 4x+\sqrt{-1}.\sin 4x\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si on effectue les opérations indiquées dans le second membre, il y aura deux espèces de termes; les uns seront multipliés par $\sqrt{-1}$, et les autres ne le seront pas; et comme le premier membre est multiplié par $\sqrt{-1}$, il faut que la partie réelle du second membre soit nulle d'elle-même, ainsi on aura

$$0=\left\{\begin{array}{l}(2\sin x)\sin x-\frac{(2\sin x)^2}{2}\cos 2x\\ +\frac{(2\sin x)^3}{3}\sin 3x-\frac{(2\sin x)^4}{4}\cos 4x\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\};$$

si après la suppression de ces termes, dans l'expression qu'on vient de trouver pour $2x.\sqrt{-1}$, on divise les deux membres par $\sqrt{-1}$, on aura

$$2x=2\sin x.\cos x+\frac{(2\sin x)^2}{2}\sin 2x$$

$$-\frac{(2\sin x)^3}{3}\cos 3x-\frac{(2\sin x)^4}{4}\sin 4x$$

$$+\frac{(2\sin x)^5}{5}\cos 5x+\frac{(2\sin x)^6}{6}\sin 6x$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

329. De la série de Leibnitz qui a été donnée § (325), on peut facilement en déduire la fonction prime de l'arc exprimé en fonction de la tangente, car en prenant la fonction prime des deux membres de l'équation

$$s = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \text{etc.},$$

on en tire

$$s' = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \text{etc.};$$

or le second membre de cette équation est égal à $\frac{1}{1+t^2}$, ainsi $s' = \frac{1}{1+t^2}$; par conséquent *la fonction prime de l'arc exprimé en fonction de la tangente de cet arc, est égale à l'unité divisée par le carré de la sécante, ou égale au carré du cosinus de l'arc.*

330. Pour avoir la fonction prime de la tangente exprimée en fonction de l'arc, il faut, dans l'expression du rapport du sinus au cosinus, supposer à la variable un accroissement, développer le résultat par rapport aux puissances de cet accroissement, et prendre le coefficient de la première puissance de cette quantité; mais comme il nous arrivera plusieurs fois d'avoir besoin de trouver la fonction prime d'une fraction, aussi bien que celle du pro-

duit de plusieurs facteurs, nous allons nous occuper de la recherche de l'une et de l'autre: commençons par celle d'un produit.

331. Soit $pqrs...$ un produit composé de tant de facteurs qu'on voudra, et dans lequel.... $p, q, r, s...$ sont des fonctions d'une même variable x; si on substitue dans chacun d'eux $x+i$ au lieu de x, la fonction p se changera en $p+ip'+$ etc., la fonction q se changera en $q+iq'+$ etc., la fonction r se changera en $r+ir'+$ etc., et ainsi de suite; par conséquent le produit $pqr...$ se changera en

$$\{p+ip'+\text{etc.}\}\{q+iq'+\text{etc.}\}\{r+ir'+\text{etc.}\}....$$

or le coefficient de la première puissance de i dans le produit de ces facteurs, s'obtient en multipliant le coefficient de la première puissance de i dans chaque facteur, par le produit des termes indépendans de cette quantité dans les autres facteurs, et ajoutant les résultats; *par conséquent la fonction prime d'un produit composé d'un nombre quelconque de facteurs, est égale à la somme des produits de la fonction prime de chaque facteur par celui de tous les autres.*

On aurait pu tirer cette règle de celle qu'on

a donnée sur les logarithmes, car on a

$$l.(pqrs\ldots) = lp + lq + lr + ls + \ldots.$$

si on prend la fonction prime des deux membres de cette équation, on aura

$$\frac{(pqrs\ldots)'}{pqrs\ldots} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q} + \frac{r'}{r} + \frac{s'}{s} + \ldots$$

faisant disparaître les dénominateurs, on trouve

$$(pqrs\ldots)' = p'qrs.. + q'prs.. + r'pqs.. + s'pqr...$$

comme ci-dessus.

332. Pour obtenir la fonction prime d'une fraction $\frac{p}{q}$, p et q étant des fonctions de x, on remplacera x par $x+i$, tant au numérateur qu'au dénominateur; on retranchera du résultat la fonction primitive $\frac{p}{q}$, ce qui donnera l'accroissement de la fonction, et on prendra le coefficient de la première puissance de l'accroissement de la variable; or la substitution de $x+i$ au lieu de x, changeant p en $p+ip'+$ etc., et q en $q+iq'+$ etc., la fraction proposée se changera en $\frac{p+ip'+\text{etc.}}{q+iq'+\text{etc.}}$; si de cette fraction on retranche la fraction

primitive $\frac{p}{q}$, la différence sera

$$\frac{ip'q + \text{etc.} - ipq' - \text{etc.}}{q\{q + iq' + \text{etc.}\}};$$

si on divise cette dernière fraction par i, et que dans le résultat on y fasse $i = 0$, on aura ce qui dans cette fraction était multiplié par la première puissance de i, et par conséquent la fonction prime de la fraction proposée; si on fait les opérations qu'on vient d'énoncer, on trouvera que

$$\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p'q - pq'}{q^2},$$

c'est-à-dire que *la fonction prime d'une fraction est égale au dénominateur multiplié par la fonction prime du numérateur, moins le numérateur multiplié par la fonction prime du dénominateur, et le tout divisé par le carré du dénominateur.*

Cette règle se déduit encore facilement de celle qui a été donnée pour avoir la fonction prime d'un logarithme, car on a

$$l\frac{p}{q} = lp - lq;$$

si on prend la fonction prime des deux mem-

b[illegible] cette équation, on aura

$$\left(\frac{p}{q}\right)' : \frac{p}{q} = \frac{p'}{p} - \frac{q'}{q},$$

de cette équation on tire

$$\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p'q - pq'}{q^2},$$

comme ci-dessus.

Ces règles établies comme on vient de le faire, il n'y a rien de plus simple que de trouver la fonction prime de tang x, car on a

$$(\text{tang } x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,\cos(x)'}{\cos^2 x};$$

or $(\sin x)' = \cos x$, d'ailleurs, $(\cos x)' = -\sin x$; ainsi

$$(\text{tang } x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

par conséquent, *la fonction prime de la tangente exprimée en fonction de l'arc, est égale à l'unité divisée par le carré du cosinus de cet arc.*

Développement de l'arc par la tangente, mais non ordonné par rapport aux puissances de cette tangente.

333. La formule de l'arc par la tangente ne converge qu'autant que l'arc que l'on considère correspond à une tangente qui ne surpasse point l'unité; ainsi on ne peut s'en servir pour trouver immédiatement les arcs qui ont des tangentes plus grandes que 1, et elle converge même si lentement, lorsque $t=1$, qu'elle ne peut être employée avec succès pour trouver immédiatement et avec quelque précision l'arc de 50°, et par suite la longueur de la circonférence entière; mais si dans la formule qui donne l'arc par le sinus, on substitue pour le sinus son expression en fonction de la tangente, on en aura une qui sera toujours convergente, quelque grande d'ailleurs que soit la tangente, puisque le facteur par lequel il faut multiplier un terme quelconque de la première série, pour avoir le suivant, est toujours moindre que l'unité. Si dans l'équation

$$x=\sin x+\frac{\sin^3 x}{2.3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin^5 x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\sin^7 x}{7}+\text{etc.},$$

on met sin x en facteur commun, on aura

$$x =$$

$$\sin x \left\{ 1 + \frac{\sin^2 x}{2.3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\sin^4 x}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\sin^6 x}{6} + \text{etc.} \right\};$$

mais

$$\sin x = \operatorname{tang} x \cos x = \frac{\operatorname{tang} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 x}};$$

si donc on substitue pour sin x sa valeur

$$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

on aura

$$x =$$

$$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{2.3}{1} \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right) + \frac{1.3}{2.4.5} \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right)^2 + \cdots \right\};$$

mais le facteur qui précède la parenthèse n'étant rationnel que pour les valeurs de t, qui font de $1 + t^2$ un quarré parfait, il convient de chercher une nouvelle série qui soit dégagée de toute irrationnalité, quelque valeur qu'on attribue à la tangente.

C'est à quoi on parviendra, en cherchant une formule qui donne le rapport de l'arc au cosinus en fonction du sinus; car ce rapport ne devant contenir que des puissances impaires du sinus, puisqu'il doit changer de signe avec l'arc, on peut le considérer comme étant le

produit du sinus de l'arc simple, par une suite de termes affectés des puissances paires de ce même sinus, et par conséquent regarder l'arc comme étant le produit du sinus par le cosinus et par une série de termes affectés des puissances paires du sinus de cet arc; et comme aux puissances paires du sinus, on peut substituer le carré de la tangente divisé par le carré de la sécante, ou $\frac{t^2}{1+t^2}$, et qu'au produit du sinus par le cosinus, on peut substituer le rapport de la tangente au carré de la sécante, ou $\frac{t}{1+t^2}$, il en résulte que l'arc sera exprimé en fonction rationnelle de la tangente, par une série qui sera toujours convergente.

Si on pose

$$\frac{x}{\cos x} = A \sin x + B \sin^3 x + C \sin^5 x + \ldots$$

on aura, en représentant le second membre par y

$$x = y \cos x;$$

élevant les deux membres au carré, et représentant $\sin x$ par s, on aura, à cause de... $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, l'équation suivante:

$$x^2 = y^2 (1 - s^2);$$

s prend les fonctions dérivées de part et d'a , par rapport à s, on aura, après avoir d par 2,

$$xx' = yy'(1 - s^2) - sy^2;$$

mais de l'équation

$$x = \text{arc}(\sin = s),$$

on tire

$$x' = \frac{1}{\cos x},$$

et comme

$$x = y \cos x,$$

on a

$$xx' = y;$$

substituant dans l'équation dérivée pour xx', la valeur que nous venons de trouver, et divisant les deux membres par y, on aura

$$1 = y'(1 - s^2) - sy,$$

ou

$$1 + sy = y'(1 - s^2);$$

mais on a, à cause de $\sin x = s$,

$$y = As + Bs^3 + Cs^5 + \text{etc.}$$

$$y' = A + 3Bs^2 + 5Cs^4 + \text{etc.};$$

si donc on substitue pour y et y' leurs valeurs dans l'équation

$$y'(1 - s^2) - sy + 1 = 0$$

que nous avons trouvé plus haut, on aura

$$\left\{\begin{array}{l|l|l|l} A+3B & s^2+5C & s^4+7D & s^6+\ldots. \\ -A & -3B & -5C & \end{array}\right\} =$$

$$1 + As^2 + Bs^4 + Cs^6 + \text{etc.}$$

Si on compare les coefficiens des puissances semblables de s, on en déduira

$$A = 1\,;\quad 3B = 2A\,;\quad 5C = 4B\,;\quad 7D = 6C,\ \text{etc.},$$

de ces équations on en tire

$$A = 1$$

$$B = A \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$C = B \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

$$D = C \cdot \frac{6}{7} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$E = D \cdot \frac{8}{9} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$$

. . . . . .

portant dans l'expression de l'arc x, pour A, B, C, D.... les valeurs que nous venons de trouver, on aura

$$x = \cos x \left\{ \sin x + \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{2.4}{3.5}\sin^5 x + \ldots \right\};$$

ou en faisant sortir le facteur $\sin x$, qui est commun à tous les termes,

$$x = \sin x \cos x \left\{ 1 + \frac{2}{3}\sin^2 x + \frac{2.4}{3.5}\sin^4 x + \ldots \right\};$$

si on substitue pour $\sin^2 x$ sa valeur exprimée en fonction de la tangente, c'est-à-dire $\frac{t^2}{1+t^2}$, et pour $\sin x \cos x$ sa valeur $\frac{t^2}{1+t^2}$, on aura

$$x = \frac{t}{1+t^2}\left\{ 1 + \frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \text{etc.} \right\},$$

formule élégante, et remarquable surtout par les coefficiens qui sont les réciproques de ceux des différentes puissances de t dans le développement de $(1-t)^{-\frac{3}{2}}$; de sorte qu'aux coefficiens numériques près qu'il faut renverser, la série de l'arc par la tangente sera donnée par le développement de

$$\frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\left\{ 1 - \frac{t^2}{1+t^2} \right\}^{-\frac{3}{2}}},$$

334. On peut encore trouver une autre formule qui soit dégagée de toute espèce d'irrationnalité, en cherchant, non le rapport de l'arc au cosinus exprimé en fonction du sinus, mais en

en cherchant le produit de l'arc par le cosinus exprimé en fonction du sinus ; car ce produit ne devant contenir que des puissances impaires du sinus, on en déduira en divisant chaque membre par le cosinus, que l'arc est égal au produit de la tangente de l'arc simple par une suite de puissances paires du sinus et par conséquent égale à une fonction rationnelle de la tangente.

Si donc on pose

$$x \cos x = As + Bs^3 + Cs^5 + Ds^7 + \text{etc.},$$

et que l'on représente le second membre par y, et qu'ensuite on substitue pour $\cos x$ sa valeur $\sqrt{1-s^2}$, on aura

$$x\sqrt{1-s^2} = y;$$

si on élève les deux membres au carré, on aura

$$x^2(1-s^2) = y^2;$$

si on prend la fonction prime des deux membres de cette équation, on obtiendra

$$xx'(1-s^2) - x^2s = yy';$$

mais puisque x est l'arc dont le sinus est s, on a

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}};$$

d'ailleurs de l'équation $y = x\sqrt{1-s^2}$, on tire

$$\frac{x}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{y}{1-s^2};$$

si donc on substitue dans l'équation dérivée trouvée plus haut, pour y' et $\frac{x}{\sqrt{1-s^2}}$ leur valeur, on aura

$$y' = 1 - \frac{sy}{1-s^2};$$

ou en faisant disparaître les dénominateurs

$$y'(1-s^2) = 1 - s^2 - sy;$$

si on remplace dans cette équation, y par

$$As + Bs^3 + Cs^5 + Ds^7 + \text{etc.}$$

et y' par

$$A + 3Bs^2 + 5Cs^4 + 7Ds^6 + \text{etc.},$$

on aura une équation de laquelle on tirera

$$A = 1;\ B = -\frac{1}{3};\ C = -\frac{2}{3.5};\ D = -\frac{2.4}{3.5.7}\ \text{etc.};$$

portant ces valeurs dans la série représentée par y, on aura

$$x\cos x = s - \frac{s^3}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{s^5}{5} - \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{s^7}{7} - \text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$x=t-\frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{1+t^2}-\frac{1.2}{3.5}\cdot\frac{t^5}{(1+t^2)^2}-\frac{1.2.4}{3.5.7}\cdot\frac{t^7}{(1+t^2)^3}-\text{etc.}$$

dans cette série, tous les termes qui suivent le premier sont négatifs ; ainsi quel que soit le terme auquel on s'arrête, on a un résultat trop grand ; dans l'autre série, au contraire, tous les termes étant positifs, on aura un résultat toujours trop faible ; ainsi en les employant toutes deux, on connaîtra le degré d'exactitude auquel on sera arrivé.

335. On pouvait prévoir d'avance que la série du § 333 ne devait contenir que des termes positifs, car l'expression de l'arc par le sinus ne contenant que des termes positifs, le produit de cette série par celle qui résulte du développement de $\frac{1}{\cos x}$, ou de $(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$ qui lui est égal, ne peut en contenir d'autre, puisque tous les termes du développement de..... $(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$ sont tous positifs.

Séries qui donnent le cosinus et le sinus d'un arc multiple en fonction des puissances des sinus ou des cosinus de l'arc simple, formules qui en résultent.

336. Commençons d'abord par les formules qui donnent les cosinus et les sinus des arcs multiples en fonction des sinus de l'arc simple; pour cela considérons les formules

$$2\cos mx = \{\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x\}^m + \{\cos x - \sqrt{-1}\,.\sin x\}^m$$

$$2\sqrt{-1}\,.\sin mx = \{\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x\}^m - \{\cos x - \sqrt{-1}\,.\sin x\}^m;$$

si on représente $\sin x$ par s, et qu'on remplace dans ces formules le cosinus de l'arc simple par sa valeur exprimée en fonction du sinus, c'est-à-dire par $\sqrt{(1-s^2)}$, le développement de $\cos mx$ et celui de $\sin mx$ dépendront seulement de celui de $\{\sqrt{(1-s^2)}+s\sqrt{-1}\}^m$; puisque le changement de signe de s dans celui-ci, suffit pour avoir le développement de $\{\sqrt{(1-s^2)}-s\sqrt{-1}\}^m$; si on représente le développement de $\{\sqrt{(1-s^2)}+s\sqrt{-1}\}^m$ par $A+Bs+Cs^2+Ds^3+\text{etc.}$, on aura en

désignant cette série par y, l'équation suivante:

$$y = \{ \sqrt{(1 - s^2)} + s\sqrt{-1} \}^m;$$

si on prend la fonction prime des deux membres par rapport à s, on aura

$$y' = m\{\sqrt{(1-s^2)}+s\sqrt{-1}\}^m \left\{ \frac{-s}{\sqrt{(1-s^2)}} + \sqrt{-1} \right\},$$

ou en réduisant

$$y' = \frac{m\sqrt{-1}\{\sqrt{(1-s^2)}+s\sqrt{-1}\}^m}{\sqrt{(1-s^2)}},$$

si on divise cette équation par la première, on aura

$$\frac{y'}{y} = \frac{m\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-s^2)}},$$

élevant les deux membres de cette dernière équation au carré, et faisant disparaître les dénominateurs, on aura

$$y'^2(1 - s^2) = -m^2y^2,$$

prenant la fonction prime des deux membres de cette équation, on en aura une autre qui étant divisée par $2y'$, donnera

$$m^2y - sy' + (1 - s^2)y'' = 0;$$

mais de l'équation

$$y = A + Bs + Cs^2 + Ds^3 + \text{etc.}$$

on en déduit successivement

$$y' = B + 2Cs + 3Ds^2 + 4Es^3 + \text{etc.}$$

$$y'' = 2.3C + 3.4Ds + 4.5Es^2 + \text{etc.};$$

si on substitue dans l'équation dérivée du second ordre trouvée ci-dessus, pour y, y', y'', leurs valeurs, on aura une équation de laquelle on tirera les suivantes :

$$-m^2A + 2C = 0$$

$$(m^2 - 1)B + 2.3D = 0$$

$$(m^2 - 4)C + 3.4E = 0$$

$$(m^2 - 9)D + 4.5F = 0$$

$$(m^2 - 16)E + 5.6G = 0$$

.....

de ces dernières équations, on en déduit par une suite de substitutions successives, les équations que voici :

$$C = -\frac{m^2 A}{2}$$

$$D = -\frac{(m^2 - 1)\,B}{2 \cdot 3}$$

$$E = \frac{m^2 (m^2 - 4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} A$$

$$F = \frac{(m^2 - 1)(m - 9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} B$$

$$G = -\frac{m^2 (m^2 - 4)(m^2 - 16)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} A$$

.....

les coefficiens A et B étant restés indéterminés, il faut chercher à les déterminer; le moyen le plus simple consiste à développer la fonction représentée par y jusqu'au second terme, or

$$\sqrt{(1 - s^2)} = 1 - \frac{s^2}{2} + \text{etc.};$$

ainsi

$$y = \left\{ 1 + s\sqrt{-1} - \frac{s^2}{2} + \text{etc.} \right\}^m,$$

par conséquent les deux premiers termes du développement de la fonction y seront..... $1 + ms\sqrt{-1}$; ainsi on aura $A = 1$, $B = m\sqrt{-1}$; si on remplace dans la fonction y les coefficiens A, B, C, D, E, etc., par les valeurs trouvées, on aura le développement cherché; si dans ce développement on change s en

$-s$, on aura un résultat qui ne différera du premier que par les signes des termes affectés des puissances impaires de s; si donc on l'ajoute avec lui, on aura d'après ce qui a été dit plus haut le développement de $\cos mx$; et au contraire, si on le retranche on aura un résultat qui étant divisé par $2\sqrt{-1}$, donnera le développement de $\sin mx$; ainsi on aura pour toutes les valeurs de m

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{2}s^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}s^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}s^6 + \text{etc.}$$

$$\sin mx = ms - \frac{m(m^2-1)}{2.3}s^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}s^5 - \text{etc.}$$

Il est bon d'observer que la première de ces formules ne se termine que lorsque le nombre m est pair, et que la seconde ne se termine que lorsque le nombre m est impair; ainsi lorsque l'une cesse d'être propre à la section des angles, c'est l'autre qui prend sa place, et qu'il faut employer pour remplir cet objet.

337. Si on prend la fonction prime des deux

membres de cette équation par rapport à x, on aura à cause que les fonctions dérivées de $\cos mx$ et de $\sin mx$ sont $-m\sin x$, et $m\cos mx$, et que celle de s est égale à $\cos x$ ou c, les deux équations

$$\sin mx =$$

$$c\left\{ms - \frac{m(m^2-4)}{2\cdot 3}s^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}s^5 + \text{etc.}\right\}$$

$$\cos mx =$$

$$c\left\{1 - \frac{m^2-1}{2}s^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2\cdot 3\cdot 4}s^4 - \text{etc.}\right\}.$$

La première de ces formules se termine lorsque m est pair, et la seconde, lorsque m est impair; ainsi ces deux formules jointes aux deux autres, en donnent quatre, dont deux donnent le sinus d'un arc multiple par un nombre fini de termes, soit que le degré de multiplicité de l'arc soit un nombre pair ou impair, et les deux autres donnent le cosinus d'un arc multiple par un nombre fini de termes, soit que le nombre m soit pair ou impair.

338. Des quatre équations que nous venons d'obtenir, on peut en déduire quatre autres en y remplaçant x par $\frac{\pi}{2} - x$; si on opère

s dernières, on remplace x par $\frac{\pi}{2}-x$, on a deux équations qui étant traitées comme celles des articles 339 et 340, donnent les formules dont nous venons de parler.

343. Si on considère la première formule du § 336, et qu'on remplace cos mx par sa valeur $1-\frac{m^2x^2}{2}$ $\frac{}{4}$ — etc., on aura une équation qui donne, après avoir supprimé l'unité de part[illegible], et divisé par $-m^2$, l'équation que

$$\frac{x^2}{2} - \frac{}{..6} - \text{etc.} =$$

$$\frac{s^2}{2} - \frac{m^2-4}{2.3.4}s^4 + \frac{(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6}s^6 - \ldots$$

si on fait passer tous les termes qui renferment la lettre m du premier membre dans le second, il faudra à cause que le premier membre ne contient plus cette lettre, que le second membre n'en dépende point, ce qui exige qu'ils disparaissent d'eux-mêmes; si donc on ne tient aucun compte des termes en m, ce qui revient à faire $m=0$, on aura

$$\frac{x^2}{2} = \frac{s^2}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{s^4}{4} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{s^6}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{s^8}{8} + \text{etc.}$$

344. Pour avoir une puissance de l'arc x d'un degré pair, marqué par $2n$, il suffira de prendre dans le second membre le coefficient de m^{2n-2}; et comme chaque terme, à partir de celui qui est affecté de s^{2n}, en fournira un, il suffira de chercher dans chacun d'eux le coefficient numérique dont il est affecté, ce qui sera facile, puisque ce coefficient, abstraction faite du dénominateur, est égal à la somme des produits $2n-2$ à $2n-2$, qu'on peut former avec les seconds termes des facteurs m^2-4, m^2-16, m^2-36, etc., qui se trouvent dans les coefficiens des puissances de s.

345. Si dans la seconde formule de l'article 336, on remplace sin mx par son développement, on aura une équation qui étant divisée par m, donnera

$$x - \frac{m^2x^3}{2.3} + \frac{m^4x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.} =$$

$$s - \frac{m^2-1}{2.3}s^3 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}s^5 - \text{etc.}$$

or cette équation ayant lieu quel que soit m, il faut que le terme indépendant de m soit le même dans les deux membres; et comme on

l'obtiendra en faisant $m = 0$, on aura

$$x = s + \frac{1}{2} \cdot \frac{s^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{s^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{s^7}{7} + \text{etc.}$$

formule connue.

346. Si on veut obtenir une puissance impaire de l'arc dont le degré soit $2n+1$, on le pourra aisément, il suffira pour cela de chercher dans le second membre de l'équation

$$x - \frac{m^2x^3}{2.3} + \frac{m^4x^5}{2.3.4.5} \ldots \pm \frac{m^{2n}x^{2n+1}}{2 \ldots (2n+1)} =$$

$$s - \frac{m^2-1}{2.3}s^3 + \ldots \pm \frac{(m^2-1)(m^2-9)\ldots\{m^2-(2k-1)^2\}}{2.3.4 \ldots 2k+1}s^{2k+1}$$

le coefficient de m^{2n}, et comme le coefficient numérique de cette quantité dans chaque terme du second membre, abstraction faite du dénominateur, est la somme des produits différens qu'on peut former avec les seconds termes des binomes (m^2-1), (m^2-9), (m^2-25), (m^2-49), etc., en les prenant $2n$ à $2n$, on pourra déterminer les coefficiens des différens termes de la série proposée.

347. Si dans les deux formules

$$\sin mx =$$

$$c\left\{ms - \frac{m(m^2-4)}{2\cdot 3}s^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}s^5 - \text{etc.}\right\}$$

$$\cos mx =$$

$$c\left\{1 - \frac{m^2-1}{2}s^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2\cdot 3\cdot 4}s^4 - \text{etc.},\right\}$$

on remplace sin mx et cos mx par leurs développemens en séries, on aura deux équations qui seront

$$mx - \frac{m^3x^3}{2\cdot 3} + \frac{m^5x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{etc.} =$$

$$c\left\{ms - \frac{m(m^2-4)}{2\cdot 3}s^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}s^4 - \text{etc.}\right\}$$

$$1 - \frac{m^2x^2}{2} + \frac{m^3x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{etc.} =$$

$$c\left\{1 - \frac{m^2-1}{2}s^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2\cdot 3\cdot 4}s^4 - \text{etc.}\right\},$$

et comme ces équations ont lieu quel que soit m, il faut que les coefficiens des mêmes puissances de m soient égaux; si on compare les coefficiens de la première puissance de m dans la première équation, on en déduit

$$x = c\left\{s + \frac{s^3}{3} + \frac{2.4}{3.5}s^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}s^7 + \text{etc.}\right\},$$

de la seconde équation on en tire, en comparant la partie indépendante de m, l'équation

$$1 = c\left\{1 + \frac{s^2}{2} + \frac{1.3}{2.4}s^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}s^6 + \text{etc.}\right\},$$

e donne pour l'expression de la sécante en fonction du sinus le développement de $(1 - s^2)^{-\frac{1}{2}}$, comme cela doit être; la comparaison des autres puissances de m donnera des séries à l'aide desquelles on pourra déterminer toutes les puissances paires de l'arc en fonction du sinus.

348. Si on raisonne sur les quatre formules des articles 339, 340, 341, de la même manière que sur celles qui ont été données 336, 337, on trouvera d'autres formules qui ne différeront de celles des articles précédens, que parce que l'arc x sera remplacé par $\frac{\pi}{2} - x$ comme cela doit être.

349. Si on substitue au lieu de s et de c leur valeur en fonction de la tangente dans la formule

$$x = c\left\{s + \frac{s^3}{3} + \frac{2.4}{3.5}s^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}s^7 + \text{etc.}\right\},$$

on aura, comme on l'a déjà trouvé,

$$x = \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{(1+t^2)^2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{t^5}{(1+t^2)^3} + \text{etc.}$$

350. Si on multiplie les deux membres de l'équation

$$x = c\left\{s + \frac{s^3}{3} + \frac{2.4}{3.5}s^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}s^7 + \text{etc.}\right\},$$

par c, on aura

$$xc=\{1-s^2\}\left\{s+\frac{s^3}{3}+\frac{2.4}{3.5}s^5+\frac{2.4.6}{3.5.7}s^7+\text{etc.}\right\};$$

si on représente le second membre par

$$s+As^3+Bs^5+Cs^7+\text{etc.},$$

on en déduira

$$A=-\frac{2}{3},\ B=-\frac{2.4}{3.5.7},\ C=-\frac{2.4.6}{3.5.7.9},\ \text{etc.};$$

par conséquent on aura

$$x=\frac{s}{c}\left\{1-\frac{2}{3}s^2-\frac{2.4}{3.5.7}s^4-\frac{2.4.6}{3.5.7.9}s^6-\text{etc.}\right\},$$

si on substitue pour s et c leur valeur en fonction de t, on aura

$$x=t\left\{1-\frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2-\frac{2.4}{3.5.7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3-\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)-\text{etc.}\right\}.$$

351. L'équation qui donne le développement complet du cosinus d'un arc multiple par les puissances des cosinus de l'arc simple, donne lieu à une multitude d'autres formules, lorsqu'on fait sur elle des raisonnemens semblables à ceux qui nous ont donné les diverses puissances d'un arc en fonction des puissances des sinus de

l'arc simple; pour le faire voir, on mettra le développement de $2\cos mx$ sous la forme

$$(2c)^m\left\{1-\frac{m}{1}(2c)^{-2}+\frac{m.m-3}{1\ .\ 2}(2c)^{-4}-\text{etc.}\right\}$$
$$+(2c)^{-m}\left\{1+\frac{m}{1}(2c)^{-2}+\frac{m.m+3}{1\ .\ 2}(2c)^{-4}+\text{etc.}\right\},$$

ensuite on remplacera $(2c)^m$ et $(2c)^{-m}$ par leurs valeurs qui sont données par les équations

$$(2c)^m = 1+ml.2c+\frac{m^2}{2}l^2.2c+\frac{m^3}{2.3}l^3.2c+\text{etc.}$$
$$(2c)^{-m} = 1-ml.2c+\frac{m^2}{2}l^2.2c-\frac{m^3}{2.3}l^3.2c+\text{etc.},$$

et on aura, à cause que

$$\cos mx = 1-\frac{m^2x^2}{2}+\frac{m^4x^4}{2.3.4}-\text{etc.},$$

l'équation suivante,

$$1-\frac{m^2x^2}{2}+\frac{m^4x^4}{2.3.4}-\frac{m^6x^6}{2.3.4.5.6}+\text{etc.} =$$
$$\left\{1+ml.2c+\frac{m^2}{2}l^2.2c+\frac{m^3}{2.3}l^3.2c+\text{etc.}\right\}\times$$
$$\left\{1-m(2c)^{-2}+\frac{m.m-3}{2\ .\ 3}(2c)^{-4}-\text{etc.}\right\}+$$
$$\left\{1-ml.2c+\frac{m^2}{2}l^2.2c-\frac{m^3}{2.3}l^3.2c+\text{etc.}\right\}\times$$
$$\left\{1+m(2c)^{-2}+\frac{m.m+3}{2\ .\ 3}(2c)^{-4}+\text{etc.}\right\};$$

Si on compare les coefficiens des mêmes puissances de m, on en déduira les puissances paires d'un arc en fonction des cosinus de cet arc.

Les mêmes remarques peuvent s'appliquer à l'équation qui donne le rapport du sinus d'un multiple quelconque d'un arc au sinus de cet arc, exprimé en fonction des sinus de ce même arc.

Développement du cosinus d'un arc multiple en fonction des puissances des cosinus de l'arc simple.

352. La formule qui donne le cosinus d'un arc multiple en fonction des puissances du cosinus de l'arc simple, est comprise dans l'équation

$$2\cos mx = \{\cos x + \sqrt{-1}\cdot\sin x\}^m + \{\cos x - \sqrt{-1}\cdot\sin x\}^m;$$

car si on remplace $\sin x$ par $\sqrt{1-\cos^2 x}$ et qu'on développe le second membre, on aura un résultat qui ne contiendra que des puissances de $\cos x$; la difficulté se réduit donc à trouver dans ce développement, la loi qui unit les coefficiens des diverses puissances de

cos x; pour y arriver nous développerons

$$\{\cos x + \sqrt{\cos^2 x - 1}\}^m,$$

par rapport aux puissances de cos x, après quoi nous changerons m en $-m$ pour avoir celui de

$$\{\cos x - \sqrt{\cos^2 x - 1}\}^m,$$

et nous ajouterons les deux résultats; pour abréger, représentons cos x par c, on aura

$$2\cos mx = \{c + \sqrt{c^2-1}\}^m + \{c - \sqrt{c^2-1}\}^m$$
$$= \{c + \sqrt{c^2-1}\}^m + \{c + \sqrt{c^2-1}\}^{-m};$$

or

$$\{c + \sqrt{c^2-1}\}^m = c^m \left\{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}}\right\}^m;$$

ainsi puisque $\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}}$ ne contient que des puissances paires et négatives de c, le premier membre de la dernière équation ne pourra être que de la forme

$$Ac^m + Bc^{m-2} + Cc^{m-4} + Dc^{m-6} + \text{etc.};$$

si on représente toute cette série par y, on aura

$$y = \{c + \sqrt{c^2-1}\}^m;$$

prenant la fonction prime des deux membres de cette équation, par rapport à c, on aura

$$y' = m\left\{c + \sqrt{c^2 - 1}\right\}^{m-1}\left\{1 + \frac{c}{\sqrt{c^2-1}}\right\}$$

ainsi

$$\frac{m\left\{c + \sqrt{c^2-1}\right\}^m}{\sqrt{c^2-1}} = \frac{my}{\sqrt{c^2-1}};$$

par conséquent

$$m^2y^2 = y'^2(c^2 - 1);$$

si on prend la fonction prime des deux membres de cette équation, par rapport à c, on en obtiendra une autre qui étant divisée par $2y'$, donnera en transposant tout dans un seul membre, l'équation suivante:

$$m^2y - cy' - y''(c^2 - 1) = 0;$$

or de l'équation

$$y = Ac^m + Bc^{m-2} + Cc^{m-4} + \text{etc.},$$

on tire

$$y' = mAc^{m-1} + (m-2)Bc^{m-3} + (m-4)Cc^{m-5} + \text{etc.}$$
$$y'' = m.m-1\,Ac^{m-2} + (m-2)(m-3)Bc^{m-4} + \text{etc.};$$

si donc on substitue dans l'équation dérivée du second ordre au lieu de y, y', y'', leurs valeurs

en série, on aura une équation qui devant avoir lieu indépendamment d'aucune valeur particulière de c, se partagera en autant d'équations qu'il y a de coefficiens à déterminer; ces équations toutes réduites sont

$$4(m-1)B + m(m-1)A = 0$$
$$8(m-2)C + (m-2)(m-3)B = 0$$
$$12(m-3)D + (m-3)(m-4)C = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de ces équations on tire

$$B = -\frac{mA}{4}$$
$$C = -\frac{m \cdot m-3}{4 \cdot 8} A$$
$$D = -\frac{m \cdot m-4 \cdot m-5}{4 \cdot 8 \cdot 12} A$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

or le premier coefficient A est égal à 2^m, puisque

$$c + \sqrt{c^2 - 1} = 2c + \text{etc.};$$

si donc on remplace A par 2^m et les coefficiens B, C, D, etc. par leurs valeurs, on aura

$$\{c + \sqrt{c^2-1}\}^m = (2c)^m - m(2c)^{m-2} + \frac{m.m-3}{1.2}(2c)^{m-4} - \frac{m.m-4.m-5}{1.2.3}(2c)^{m-6} + \text{etc.}$$

353. La composition des coefficiens numériques de cette série est très-remarquable, elle consiste en ce que l'un quelconque de ces coefficiens s'obtient, en formant une fraction dont le dénominateur soit le produit de la suite naturelle des nombres, jusqu'à celui qui indique le rang du terme, et dont le numérateur soit le produit continuel des nombres m, $m-1$, $m-2$, etc., jusqu'à celui qui est supérieur d'une unité à l'exposant du double cosinus dans ce terme, et dans lequel on supprime les facteurs dont les complémens au nombre m sont marqués par les facteurs du dénominateur; quant au signe du coefficient, il est positif, si le nombre des facteurs du dénominateur est pair, et il est négatif, si le nombre de ces facteurs est impair.

354. Si dans la série qui donne le développement de $(c-\sqrt{c^2-1})^m$, on change m en $-m$, on aura le développement de $(c-\sqrt{c^2-1})^{-m}$; si on l'ajoute au premier, on aura

$$2\cos mx =$$

$$\left\{(2\cos x)^m - m(2\cos x)^{m-2} + \frac{m.m-3}{1.2}(2\cos x)^{m-4} - \text{etc.}\right\}$$

$$+\left\{(2\cos x)^{-m} + m(2\cos x)^{-m-2} + \frac{m.m+3}{1.2}(2\cos x)^{-m-3} + \text{etc.}\right\},$$

si dans cette équation on suppose que le nombre m soit un nombre entier, les deux séries qui forment le second membre, ne se terminent point, mais les puissances négatives du double cosinus dans l'une, se trouvant avec des coefficiens égaux et de signes contraires dans l'autre, la destruction mutuelle de ces termes s'opère, et il ne reste plus qu'un nombre fini de termes pour l'expression du cosinus de l'arc multiple en fonction des puissances du cosinus de l'arc simple, comme cela doit être; on peut donc, lorsque le nombre m est un nombre entier, n'avoir égard si on veut qu'à la première des deux séries, pourvu que l'on ne prenne que les termes de cette série qui sont affectés des puissances positives du cosinus de l'arc simple. Mais si le nombre m est fractionnaire, les termes de l'une ne se trouvant plus dans l'autre avec des signes contraires, leur destruction mutuelle n'a plus lieu, et leur réunion est nécessaire pour avoir le développement complet de cos mx, ce qu'Euler a remarqué le premier. *Voyez* le tome IX des *Nova Acta* de l'Académie de Pétersbourg, année 1791.

355. Pour faire voir, lorsque le nombre m est un nombre entier, que les termes affectés des

puissances négatives du double cosinus se trouvent dans les deux séries avec des signes contraires, considérons le terme qui, dans la seconde série, est affecté de $(2c)^{-m-2r}$, son coefficient est égal à

$$\frac{m\,(m+r+1)\,(m+r+2)\,\ldots\ldots\,(m+2r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots\,(r-1)\,r};$$

mais le coefficient du terme qui, dans la première série, est affecté de $(2c)^{-m-2r}$ ou de $(2c)^{m-2(m+r)}$, est égal à

$$\frac{m(m-m-r-1)\,(m-m-r-2)\ldots\ldots(m-2m-2r+1)}{(-1)\,(-2)\,(-3)\,\ldots\,(-m-r)};$$

de plus cette fraction est égale à

$$-\frac{m\,(r+1)\,(r+2)\,\ldots\ldots\,(m+2r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots\,m+r};$$

et comme le numérateur et le dénominateur contiennent les facteurs $r+1$, $r+2$, $r+3$,... $r+m$; si on les supprime, elle se réduira à

$$-\frac{m(m+r+1)\,(m+r+2)\,\ldots\ldots\,(m+2r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots\,(r-1)\,r},$$

quantité qui est la même, au signe près, que celle qui multiplie la puissance correspondante du double cosinus dans la seconde série.

356. Si on prend la différence des deux series dont se compose l'expression de cos mx, on aura une nouvelle expression qui sera composée d'un nombre infini de termes, et qui sera le développement de $2\sqrt{-1}\,.\sin mx$; mais comme ce développement ne se compose que de termes réels, à cause que l'imaginarité de $\sqrt{c^2-1}$ ne se manifeste dans aucuns des termes de son développement; il en résulte que l'expression de $\sin mx$ ne contiendra que des termes imaginaires, et que par conséquent elle ne sera point propre à donner la valeur des sinus des arcs multiples; mais pour avoir une expression réelle de $\sin mx$, il suffit de prendre la fonction prime des deux membres de l'équation qui donne la valeur de cos mx, et de se rappeler que la fonction prime de cos mx est égale à $-m$ sin mx et que celle du cosinus de l'arc simple est égale au sinus de ce même arc pris négativement, car on aura, en divisant les deux membres par $-m$, l'équation

$$\sin mx =$$

$$s\left\{(2c)^{m-1}-(m-2)(2c)^{m-3}+\frac{m-3.m-4}{2}(2c)^{m-5}-\text{etc.}\right\}$$

$$-s\left\{(2c)^{-m-1}+(m+2)(2c)^{-m-3}+\frac{m+3.m+4}{2}(2c)^{-m-5}+\text{etc.}\right\}$$

357. Quoique le second membre de cette équation se compose de la différence de deux séries, et que chacune d'elles s'étende à l'infini, cela n'empêche point que ce second membre ne renferme qu'un nombre fini de termes lorsque le nombre m est un nombre entier, parce que les termes affectés des puissances négatives du cosinus dans l'une des séries, se retrouvant dans l'autre avec le même coefficient, il en résulte qu'il ne reste plus dans ce second membre, que les termes de la première série qui ont des exposans positifs; c'est donc de ces termes seulement dont il faudra tenir compte, lorsque le nombre m sera entier, sans avoir aucun égard aux autres termes de cette même série, ni à ceux de la seconde; mais si le nombre m n'est pas entier, les puissances négatives de l'une d'elles ne se trouvant pas dans d'autre, la destruction mutuelle de ces termes n'a plus lieu, et leur réunion est nécessaire pour obtenir le développement complet de sin mx.

Détermination d'un arc d'ellipse par les séries.

358. Après avoir montré l'usage des équations dérivées pour trouver dans quelques séries la loi qui unit les coefficiens des termes qui les composent, nous allons faire voir le parti qu'on en peut tirer pour obtenir celle des coefficiens des termes de la suite qui donne l'expression d'un arc d'ellipse par la partie de l'axe qui lui correspond.

359. Supposons, pour plus de simplicité, que l'arc que l'on considère ait son origine à l'une des extrémités du petit axe et que les abscisses soient comptées sur le grand axe, à partir du centre; si on désigne par x l'abscisse qui correspond à l'arc u, il est clair que l'expression de cet arc ne doit contenir que des termes multipliés par x, puisqu'il s'évanouit quand on fait $x = 0$, et comme d'ailleurs l'arc change de signe sans changer de grandeur lorsque x sans changer de grandeur change de signe, il faut nécessairement que l'expression d'un arc d'ellipse ne renferme que des puissances impaires de x, ainsi on aura pour toutes les valeurs

de x

$$u = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.}$$

Si on substitue $x + i$ au lieu de x, l'arc prendra un accroissement qui dépendra de i, et le coefficient de la première puissance de i dans u sera le même que celui de la même puissance de i dans le second membre. Or on sait que le coefficient de la première puissance de i dans l'accroissement de l'arc u est égal à $\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}$, et comme le coefficient de la première puissance de i dans le second membre s'obtient en multipliant chacun des termes de ce second membre par l'exposant de x, et diminuant l'exposant d'une unité, il en résulte qu'on aura

$$\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + \ldots\ldots$$

Si on représente le second membre par y, et que l'on élève les deux membres de l'équation au carré, on aura, en faisant disparaître les dénominateurs,

$$1 - e^2x^2 = (1 - x^2)\,y^2,$$

si on prend la fonction dérivée de chaque membre par rapport à x, on aura après avoir

divisé toute l'équation par 2 et l'avoir ensuite multipliée par x, une nouvelle équation qui donnera, après avoir substitué pour $-e^2x^2$ sa valeur tirée de l'équation précédente et fait les réductions convenables

$$y^2 - 1 = (x - x^3)\,y'$$

y' désignant la fonction prime de y, si on divise les deux membres par y, et qu'on prenne la fonction dérivée par rapport à x, on aura, après les réductions qui se présentent,

$$\frac{y'}{y^2} = (x - x^3)\,y'' - 3x^2y',$$

mais

$$y^2 = \frac{1 - e^2x^2}{1 - x^2}.$$

Si donc on substitue pour y^2 sa valeur dans l'équation ci-dessus, on aura, après avoir fait disparaître les dénominateurs, l'équation

$$y'\,(+2x^2 - 3e^2x^4) = y''\,(x - x^3 - e^2x^3 + e^2x^5).$$

Si pour abréger on substitue dans l'expression de y au lieu de A sa valeur qui est l'unité, et que l'on représente les coefficiens des diverses puissances de x dans cette même expression par α, β, γ, δ....., on aura,

$$y = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \text{etc.}$$
$$y' = 2\alpha x + 4\beta x^3 + 6\gamma x^5 + \text{etc.}$$
$$y'' = 2\alpha + 3.4\beta x^2 + 5.6\gamma x^4 + \text{etc.}$$

Si on remplace dans l'équation dérivée du second ordre que nous avons trouvé ci-dessus pour y', y'' leurs valeurs, on aura, en supprimant le premier terme de chaque membre, l'équation suivante

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} +4\beta & x^3 + 6\gamma & x^5 + 8\delta & x^7 + \text{etc.} \\ +4\alpha & +8\beta & +12\gamma & +\text{etc.} \\ & -2.3\alpha e^2 & -2.3\beta e^2 & -\text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} +3.4\beta & x^3 + 5.6\gamma & x^5 + 7.8\delta & x^7 + \text{etc.} \\ -2\alpha & -3.4\beta & -5.6\gamma & -\text{etc.} \\ -2\alpha & -3.4\beta e^2 & -5.6\gamma e^2 & -\text{etc.} \\ & & +3.4\beta e^2 & +\text{etc.} \end{array}$$

comparant les coefficiens des termes affectés des mêmes puissances de x, on aura, pour déterminer ces coefficiens, les équations suivantes

$$2.\ 4\beta = (3 + e^2).\ 2\alpha - 8$$
$$4.\ 6\gamma = (5 + 3e^2).\ 4\beta - 8.\ 1.\alpha.e^2$$
$$6.\ 8\delta = (7 + 5e^2).\ 6\gamma - 8.\ 3.\beta.e^2$$
$$8.10\varepsilon = (9 + 7e^2).\ 8\delta - 8.\ 6.\gamma.e^2$$
$$10.12\zeta = (11 + 9e^2).10\varepsilon - 8.10.\delta.e^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en général si on désigne par χ les coefficiens de x^{np}, on aura en appelant φ, $\downarrow$ les coefficiens des deux termes qui précèdent immédiatement ce dernier

$$(2p-2)2p\chi=(2p-1+(2p-3)e^2)(2p-2)\downarrow-8.\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Pour déterminer α, il faut développer

$$\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}$$

jusqu'au second terme, et on trouvera

$$\frac{1-e^2}{2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\alpha=\frac{b^2}{2};$$

portant cette valeur dans les expressions des autres coefficiens, ils seront tous déterminés et on aura, à cause des équations,

$$2B=\alpha,\quad 3C=\beta,\quad 4D=\gamma,\ \text{etc.}$$

l'équation suivante

$$u=x+\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^5}{5}+\frac{\gamma x^7}{7}+\text{etc.}$$

si

si on fait

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \alpha_1 b^2 \\ 2.4\beta &= \beta_1 b^4 \\ 2.4.6\gamma &= \gamma_1 b^6 \\ 2.4.6.8\delta &= \delta_1 b^8 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

l'équation précédente se présente sous une forme plus élégante, et on a

$$u = x + \frac{\alpha_1 b^2 x^3}{2.3} + \frac{\beta_1 b^4 x^5}{2.4.5} + \frac{\gamma_1 b^6 x^7}{2.4.6.7} + \text{etc.}$$

pour déterminer les quantités α_1, β_1, γ_1, etc., on a les équations suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \beta_1 &= \{3 + e^2\}\alpha_1 \\ \gamma_1 &= \{5 + 3e^2\}\beta_1 - 8.1.\alpha_1 e^2 \\ \delta_1 &= \{7 + 5e^2\}\gamma_1 - 8.3.\beta_1 e^2 \\ \varepsilon_1 &= \{9 + 7e^2\}\delta_1 - 8.6.\gamma_1 e^2 \\ \zeta_1 &= \{11 + 9e^2\}\varepsilon_1 - 8.10.\delta_1 e^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Si dans ces équations on fait $e = 0$, les coefficiens prennent des valeurs qui étant introduites dans la formule

$$u = x + \frac{\alpha_1 . b^2 x^3}{2 . 3} + \frac{\beta_1 . b^4 x^5}{2.4.5} + \frac{\gamma_1 b^6 x^7}{2.4.6.7} + \text{etc.}$$

donne

$$u = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

ce qui doit être, car l'hypothèse de $e = 0$ faisant rentrer l'ellipse dans le cercle, l'expression d'un arc d'ellipse doit alors coincider avec celle de l'arc correspondant du cercle, ce qui a lieu ici, puisque x est égal au sinus de l'arc u.

Décomposition des sinus et des cosinus en facteurs rationnels et algébriques.

360. Si on désigne par x un arc, on aura, à cause que $\sin k\pi = 0$ lorsque k est un nombre entier positif ou négatif, l'équation suivante

$$\sin x = \sin x + \sin k\pi;$$

or le second membre de cette équation est égal à

$$2 \sin \frac{k\pi + x}{2} \cos \frac{k\pi - x}{2};$$

ainsi on aura

$$\sin x = 2 \sin \frac{k\pi + x}{2} \cos \frac{k\pi - x}{2};$$

mais le développement du sinus d'un arc

étant divisible par la première puissance de cet arc, et ne pouvant être divisé par aucune puissance de cet arc supérieure à la première, il en résulte que l'expression complète de $2 \sin \frac{k\pi + x}{2}$ est divisible par $k\pi + x$, et qu'elle ne peut être divisée par aucune puissance de cette quantité supérieure à la première, et comme le développement de.... $\cos \frac{k\pi - x}{2}$ ne peut être divisé par aucune puissance de $k\pi + x$, il en résulte que l'expression de $\sin x$ est divisible par $k\pi + x$, et qu'elle ne peut être divisée par aucune puissance de cette quantité plus élevée que la première; de plus, cette divisibilité ayant lieu, quel que soit le nombre entier que l'on prenne pour k, et non pour toute autre espèce de nombre, il en résulte que les facteurs simples par lesquels on peut diviser $\sin x$, sont

$$x, \pi + x, \quad 2\pi + x, \quad 3\pi + x, \quad 4\pi + x, \ldots.$$

$$-\pi + x, -2\pi + x, -3\pi + x, -4\pi + x, \ldots.$$

pour établir la condition que ces facteurs doivent remplir, afin de reproduire identiquement l'expression de $\sin x$, il faut faire ensorte que

le coefficient de la première puissance de x dans le produit de tous ces facteurs soit égal à l'unité, ce qui exige que le produit des facteurs binomes soit divisé par le produit de leurs premiers termes, et comme cet objet sera rempli en divisant chaque facteur par son premier terme, puisque la distribution des facteurs par lesquels on divise est absolument arbitraire, on aura, en ayant soin d'effectuer le produit des facteurs qui ne diffèrent que par le signe du second terme

$$\sin x = x\left\{1-\frac{x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right\}\ldots$$

361. Puisque les facteurs premiers par lesquels on a trouvé que sin x pouvait être divisé sont

$$x,\ \pi+x,\quad 2\pi+x,\quad 3\pi+x,\quad 4\pi+x\ldots$$
$$-\pi+x,\ -2\pi+x,\ -3\pi+x,\ -4\pi+x\ldots$$

tous ceux qui diviseront exactement $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ou cos x seront nécessairement, à un facteur constant près,

$$\frac{\pi}{2}-x,\quad \frac{3\pi}{2}-x,\quad \frac{5\pi}{2}-x,\quad \frac{7\pi}{2}-x,\ \ldots.$$
$$-\frac{\pi}{2}-x,-\frac{3\pi}{2}-x,-\frac{5\pi}{2}-x,-\frac{7\pi}{2}-x,\ \ldots.$$

et comme le premier terme du développement de cos x est l'unité, il faut, afin de reproduire avec les facteurs précédens le développement de cos x, diviser le produit de tous ces facteurs par celui de leurs premiers termes, ce qui revient à diviser chacun des facteurs binomes par son premier terme; par conséquent on aura, en effectuant après cette opération la multiplication des facteurs qui ne diffèrent que par le signe du second terme,

$$\cos x = \left\{1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right\}\left\{1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right\}\cdots$$

362. Cette formule peut se déduire de celle qui donne le sinus d'un arc par le produit d'un nombre infini de facteurs; car de l'équation $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, on en tire

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x};$$

or

$$\sin 2x = 2x\left\{1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1 - \frac{4x^2}{4\pi^2}\right\}\left\{1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right\}\cdots$$

d'ailleurs

$$\sin x = x\left\{1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right\}\left\{1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right\}\cdots$$

si on divise la première équation par le double

de la seconde, et qu'on observe que les facteurs de rang impair dans le second membre de la première équation, sont ceux qui se trouvent dans le second membre de la seconde équation, on aura comme plus haut,

$$\cos x =$$

$$\left\{1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right\}\ldots$$

363. Si dans l'expression de $\sin x$ et de $\cos x$, on remplace x par $\frac{m\pi}{2n}$, on aura

$$\sin\frac{m\pi}{2n} =$$

$$\frac{m\pi}{2n}\left\{1-\frac{m^2}{4n^2}\right\}\left\{1-\frac{m^2}{16n^2}\right\}\left\{1-\frac{m^2}{36n^2}\right\}\left\{1-\frac{m^2}{64n^2}\right\}$$

$$\cos\frac{m\pi}{n} =$$

$$\left\{1-\frac{m^2}{n^2}\right\}\left\{1-\frac{m^2}{9n^2}\right\}\left\{1-\frac{m^2}{25n^2}\right\}\left\{1-\frac{m^2}{49n^2}\right\}\ldots$$

364. Si on substitue aux facteurs doubles qui se trouvent dans les seconds membres de ces deux équations, leurs facteurs simples, elle deviendront

$$\sin\frac{m\pi}{2n} =$$

$$\frac{m\pi}{2n}\left\{\frac{2n-m}{2n}\right\}\left\{\frac{2n+m}{2n}\right\}\left\{\frac{4n-m}{4n}\right\}\left\{\frac{4n+m}{4n}\right\}\ldots$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} =$$

$$\left\{\frac{n-m}{n}\right\}\left\{\frac{n+m}{n}\right\}\left\{\frac{3n-m}{3n}\right\}\left\{\frac{3n+m}{3n}\right\}\ldots\text{d}$$

365. Si dans la première formule qui donne $\sin\frac{m\pi}{2n}$, on fait $\frac{m}{n}=1$, on aura une équation de laquelle on tirera

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2\ldots.}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\ldots.};$$

Cette expression très-remarquable est celle que Wallis a trouvée pour la valeur du quart de la circonférence, et qu'il a donnée pour la première fois dans son *Arithmetica infinitorum*.

366. Si dans les formules trouvées § 362 pour $\sin\frac{m\pi}{2n}$ et $\cos\frac{m\pi}{2n}$ on change m en k, on aura des formules semblables aux premières; si on divise successivement celles-ci par les secondes, on en déduira

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}=\frac{m}{k}\cdot\frac{2n-m}{2n-k}\cdot\frac{2n+m}{2n+k}\cdot\frac{4n-m}{4n-k}\cdot\frac{4n+m}{4n+k}\cdot\text{d}$$

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{k\pi}{2n}}=\frac{m}{n-k}\cdot\frac{2n-m}{n+k}\cdot\frac{2n+m}{3n-k}\cdot\frac{4n-n}{3n+k}\ldots\text{d}$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{k\pi}{2n}} = \frac{n-m}{n-k}\cdot\frac{n+m}{n+k}\cdot\frac{3n-m}{3n-k}\cdot\frac{3n+m}{3n+k}\cdots\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}} = \frac{n-m}{k}\cdot\frac{n+m}{2n-k}\cdot\frac{3n-m}{2n+k}\cdot\frac{3n+m}{4n-k}\cdots\cdots$$

de ces quatre équations, on en déduira le sinus et le cosinus d'un arc $\frac{m\pi}{n2}$, lorsque le sinus ou le cosinus d'un autre arc $\frac{m\pi}{2n}$ sera connu; cependant il faut convenir que ces sortes d'expressions sont bien peu propres à obtenir, par approximation, la valeur de π, ou celles de $\sin\frac{m\pi}{2n}$ et de $\cos\frac{m\pi}{2n}$, à cause du grand nombre de facteurs qu'il faudrait prendre, aussi ne se sert-on point de ces expressions pour avoir des valeurs approchées des quantités qu'elles expriment; mais un de leurs principaux avantages est dans le calcul des logarithmes de ces quantités, à cause de la convergence des formules auxquelles ces dernières donnent lieu.

367. On peut aussi déduire de la même formule une infinité d'expressions semblables pour $\frac{\pi}{a}$, lorsqu'en se donnant l'arc $\frac{m\pi}{2n}$, on connaît la

valeur correspondante du sinus ; car si dans l'expression de $\sin\frac{m\pi}{2n}$ on y fait successivement

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{2},\ \frac{m}{n}=\frac{1}{3},\ \text{etc.},$$

on aura des équations desquelles on tirera

$$\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdots$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdots$$

. . . . . .

d'ailleurs un des grands avantages de ces formules, et qui tient à leur forme actuelle, est de pouvoir assigner les vraies valeurs d'une infinité d'expressions qui sont composées d'une infinité de facteurs, au moyen du cercle ou de quantités qui se déterminent dans le cercle.

368. Si dans la première de ces formules, on remplace $\frac{\pi}{2}$ par l'expression trouvée par *Wallis*, on aura

$$\sqrt{2}=\frac{2.2.6.6.10.10.14.14.18.18....}{1.3.5.7.\ 9.11.13.15.17.19....}$$

Des expressions trouvées pour $\sin\frac{m\pi}{2n}$ et

$\cos\frac{m\pi}{2n}$, on pourra facilement en déduire les expressions de tang $\frac{m\pi}{2n}$, cot $\frac{m\pi}{2n}$, séc $\frac{m\pi}{2n}$, et coséc $\frac{m\pi}{2n}$, en produits d'un nombre infini de facteurs;

369. Si dans les formules trouvées (362) pour $\sin\frac{m\pi}{2n}$ et $\cos\frac{m\pi}{2n}$, on remplace m par $m-n$, on aura, à cause de $\sin\frac{(n-m)\pi}{2n} = \cos\frac{m\pi}{2n}$ et de $\cos\frac{(n-m)\pi}{2n} = \sin\frac{m\pi}{2n}$, des formules, que l'on reconnaîtra être parfaitement identiques à celles qu'on a déjà trouvées, lorsque pour $\frac{\pi}{2}$, on substituera l'expression trouvée par Wallis.

370. On peut établir la théorie des sinus et des cosinus en facteurs algébriques, sur d'autres considérations que celles dont on vient de faire usage, et faire dépendre la décomposition en facteurs de celle de la somme de deux puissances en facteurs trinomes; en effet, on a

$$2\cos x =$$

$$\left\{\cos\frac{x}{2n}+\sqrt{-1}.\sin\frac{x}{2n}\right\}^{2n}+\left\{\cos\frac{x}{2n}-\sqrt{-1}\sin\frac{x}{2n}\right\}^{2n},$$

or on sait que la somme de deux puissances

telles que $z^{2n} + a^{2n}$ peut se décomposer en un nombre n de facteurs trinomes de la forme

$$z^2 - 2az \cos.\{ 2k + 1 \} \frac{\pi}{2n} + a^2,$$

et comme les facteurs particuliers du second degré résultent de celui-ci, lorsque pour k on substitue successivement tous les nombres entiers 0, 1, 2, 3..., qui sont inférieurs à n; il en résulte que si on remplace z dans ce trinome par

$$\cos \frac{x}{2n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{x}{2n}$$

et a par

$$\cos \frac{x}{2n} - \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{x}{2n},$$

on trouvera que $2 \cos x$ est égal au produit d'autant de facteurs de la forme

$$2 \left\{ \cos \frac{x}{n} . - \cos (2k + 1) \frac{q}{n} \right\}$$

qu'il y a d'unités dans n; et comme ces facteurs résulteront de la substitution des nombres $0, 1, 2, 3 \ldots . n - 1$, à la place de k dans cette expression, il s'ensuit à cause que le facteur trinome qui les comprend tous est égal à

$$2. \left\{ 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2n} - \cos (2k + 1) \frac{q}{n} \right\}.$$

ou bien à

$$2\left\{-2\sin^2\frac{x}{2n}+2\sin^2(2k+1)\frac{q}{2n}\right\};$$

ou bien encore à

$$4\sin^2(2k+1)\frac{q}{2n}\left\{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n}}{\sin^2(2k+1)\frac{q}{2n}}\right\};$$

qu'on aura l'équation

$$2\cos x=4^n\sin^2\frac{q}{2n}\sin^2\frac{3q}{2n}\sin^2\frac{5q}{2n}\ldots\sin^2\frac{(2n+1)q}{2n}\times$$

$$\left\{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n}}{\sin^2\frac{q}{2n}}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n}}{\sin^2\frac{3q}{2n}}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n}}{\sin^2\frac{5q}{2n}}\right\}\ldots.$$

or si on divise le quart de la circonférence en $2n$ parties égales, les sinus des arcs qui comprendront un nombre impair de ces parties, seront les moitiés des cordes qui soutendent des arcs doubles; par conséquent le produit des facteurs qui précèdent les parenthèses, sera égal à celui des carrés de ces cordes; or, si on conçoit que tous les arcs soutendus par ces cordes aient une origine commune, ces cordes seront celles qui partiraient d'un même point de la circonférence,

et qui aboutiraient aux points de division dont le numéro serait impair si à cette origine on plaçait zéro, et si on partageait la demi-circonférence en $2n$ parties égales; par conséquent le produit des carrés de toutes ces cordes est égal à 2, puisqu'en vertu du théorème de Côtes, § 209, la somme des puissances m du rayon et de la distance d'un point au centre, est égale au produit des distances de ce même point aux points de la circonférence auxquels sont appliqués des nombres impairs, lorsque la circonférence est partagée en un nombre pairement pair de parties égales, on aura donc, quelque grand que soit le nombre n,

$$\cos x =$$

$$\left\{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n}}{\sin^2 \frac{q}{2n}}\right\}\left\{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n}}{\sin^2 \frac{3q}{2n}}\right\}\left\{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n}}{\sin^2 \frac{5q}{2n}}\right\}\ldots\ldots$$

or si dans une expression telle que $\frac{\sin^2 \frac{x}{2n}}{\sin^2 \frac{kq}{2n}}$, on substitue pour chaque sinus son développement en fonction de l'arc, on trouvera qu'elle s'approche d'autant plus de $\frac{x^2}{k^2q^2}$, ou de $\frac{4x^2}{k^2\pi^2}$, que le nombre n est plus considérable, le second

membre de l'équation précédente s'approchera d'autant plus d'être égal à

$$\left\{1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right\}\ldots\ldots$$

que le nombre n sera plus grand, et il coïncidera entièrement avec lui, lorsqu'on fera n infini; par conséquent on aura

$$\cos x=\left\{1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right\}\ldots\ldots$$

371. La méthode précédente ne laisse rien à désirer, tant pour la rigueur que pour la simplicité; cependant, comme l'hypothèse de n infini pourrait laisser quelques nuages dans l'esprit de quelques personnes, et faire craindre que la considération de l'infini n'altère l'exactitude du résultat, nous allons joindre à ce qui a été dit quelques réflexions propres à dissiper les doutes qui pourraient encore rester, et faire sentir que non-seulement le résultat est indépendant de l'hypothèse que nous avons faite sur le nombre n, mais encore que cette considération n'a été employée que comme un artifice de calcul propre à donner immédiatement les facteurs rationnels de premier degré qui, par leur multiplication, reproduirait l'ex-

pression du sinus en fonction de l'arc; pour cela imaginons que l'on substitue dans chacun des facteurs

$$1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n}}{\sin^2 \frac{3q}{2n}}, \quad 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n}}{\sin^2 \frac{3q}{2n}}, \quad \text{etc.},$$

au lieu des sinus leurs développemens en fonction de l'arc, on aura un nombre n de facteurs polynomes qui étant multipliés entr'eux reproduiront identiquement l'expression de $\cos x$, de manière que la lettre n disparaîtra entièrement du résultat, puisque le premier membre ne la contient pas; mais lorsque le nombre n est fini, le développement du cosinus est le produit d'un nombre fini de polynomes, et comme ces polynomes en même temps que leur nombre augmente tendent à se rapprocher des deux premiers termes, il en résulte que l'hypothèse de n infini est celle qu'il faut établir sur le nombre n pour faire disparaître dans chaque polynome les termes qui suivent les deux premiers; mais alors le nombre des facteurs n'est plus fini comme auparavant, mais il est infini; c'est ce qui fait que dans le résultat il ne reste aucune trace de

l'hypothèse faite sur le nombre n, et que l'expression trouvée est rigoureusement exacte.

En raisonnant d'une manière à peu près semblable sur l'équation

$$2\sqrt{-1}\,.\,\sin x =$$

$$\left(\cos\frac{x}{2n}+\sqrt{-1}\,.\sin\frac{x}{2n}\right)^{2n}-\left(\cos\frac{x}{2n}-\sqrt{-1}\,.\sin\frac{x}{2n}\right)^{2n};$$

on trouvera

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots.$$

c'est aussi ce qui résulte de l'expression même de $\cos x$, lorsqu'on y remplace $\frac{\pi}{2}-x$ au lieu de x; en effet, si on fait cette substitution, on trouve

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x=\frac{2x}{\pi}\left\{\frac{2\pi-2x}{\pi}\right\}\left\{\frac{2\pi+2x}{3\pi}\right\}\times$$

$$\left\{\frac{4\pi-2x}{3\pi}\right\}\left\{\frac{6\pi+2x}{5\pi}\right\}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{3.3.5.5.7.7\ldots}\times$$

$$x\left\{1-\frac{x}{\pi}\right\}\left\{1+\frac{x}{\pi}\right\}\left\{1-\frac{x}{2\pi}\right\}\left\{1+\frac{x}{2\pi}\right\}\ldots$$

or si on remplace $\sin x$ par $x-\frac{x^3}{2.3}+$ etc., et qu'après avoir divisé les deux membres par x on

on fait $x=0$, on en déduira

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ldots}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\ldots}=1;$$

par conséquent on aura

$$\sin x = x\left\{1-\frac{x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right\}\ldots.$$

comme on l'a déjà trouvé § 360.

Ceux qui desireront plus de développemens sur ce qui vient d'être dit, pourront recourir à l'ouvrage d'Euler qui a pour titre *Introductio in analysin Infinitorum*, ou à la traduction française qui en a été donnée par M. Labey, qui l'a enrichi d'éclaircissemens et de notes intéressantes.

372. Si on prend les logarithmes des deux membres des équations

$$\sin x = x\left\{1-\frac{x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right\}\ldots\ldots$$

$$\cos x = \left\{1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right\}\ldots\ldots$$

on aura les deux équations

$$\text{l.sin } x =$$

$$lx + l\left\{1-\frac{x^2}{\pi^2}\right\}+l\left\{1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right\}+l\left\{1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right\}+\ldots$$

$$\text{l.cos } x =$$

$$\left\{1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right\}+l\left\{1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right\}+l\left\{1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right\}+\ldots$$

si on prend la fonction prime des deux membres de chacune de ces dernières équations, on aura

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \text{etc.}$$

$$\tang x = \frac{8x}{\pi^2 - 4x^2} + \frac{8x}{9\pi^2 - 4x^2} + \frac{8x}{25\pi^2 - 4x^2} + \text{etc.}$$

Décomposition en facteurs de la somme et de la différence de deux exponentielles.

575. La comparaison des séries qui donnent les sinus et les cosinus d'un arc avec le développement des exponentielles nous a conduits aux deux équations

$$2\cos x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

$$2\sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}};$$

si dans ces deux équations on change x en $x\sqrt{-1}$, on aura

$$2\cos(x\sqrt{-1}) = e^x + e^{-x}$$

$$-2\sqrt{-1}\sin(x\sqrt{-1}) = e^x - e^{-x}.$$

la première de ces deux équations exprime

que si dans le développement de $2\cos x$, on substitue $x\sqrt{-1}$, au lieu de x, on retombera sur la série qui exprime le développement de $e^x + e^{-x}$; si donc on substitue $x\sqrt{-1}$ au lieu de x, dans le produit des facteurs dans lesquels se décompose le développement de $\cos x$, on obtiendra un produit composé d'un nombre infini de facteurs et qui sera égal à $e^x + e^{-x}$, ainsi on aura l'équation

$$e^x + e^{-x} = \left\{1 + \frac{4x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1 + \frac{4x^2}{9\pi^2}\right\}\left\{1 + \frac{4x^2}{25\pi^2}\right\}\cdots$$

la seconde équation exprime que si dans l'expression de $-2\sqrt{-1}\sin x$, on change x en $x\sqrt{-1}$, on aura un résultat qui sera égal à $e^x - e^{-x}$; si donc on substitue dans l'expression de $-2\sqrt{-1}$. $\sin x$ décomposée en produits de facteurs indéfinis $x\sqrt{-1}$ au lieu de x, on aura la valeur de $e^x - e^{-x}$; par conséquent on aura en divisant les deux membres par $-2\sqrt{-1}$,

$$e^x - e^{-x} = x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

374. D'après ce qui vient d'être dit, il est facile de voir qu'une expression de la forme

$$e^{2x} - 2\cos 2\varphi + e^{-2x},$$

peut se décomposer en un nombre infini de facteurs; en effet on a

$$e^{2x}-2\cos 2\varphi+e^{-2x}=2\cos(2x\sqrt{-1})-2\cos 2\varphi;$$

or on a

$$\cos a-\cos b=2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b),$$

ainsi le second membre de l'avant dernière équation est égal à

$$4\sin(\varphi+x\sqrt{-1})\times\sin(\varphi-x\sqrt{-1});$$

or on a

$$\sin x=x\left(\frac{\pi-x}{\pi}\right)\left(\frac{\pi+x}{\pi}\right)\left(\frac{2\pi+x}{2\pi}\right)\left(\frac{2\pi-x}{2\pi}\right)\ldots$$

si dans cette équation on substitue successivement pour x, $\varphi+x\sqrt{-1}$ et $\varphi-x\sqrt{-1}$, et qu'ensuite on multiplie les deux équations résultantes membre à membre, on aura

$$\sin(\varphi+x\sqrt{-1})\sin(\varphi-x\sqrt{-1})=(\varphi^2+x^2)\times$$

$$\left\{\frac{(\pi-\varphi)^2+x^2}{\pi^2}\right\}\cdot\left\{\frac{(\pi+\varphi)^2+x^2}{\pi^2}\right\}\times$$

$$\left\{\frac{(2\pi-\varphi)^2+x^2}{4\pi^2}\cdot\frac{(2\pi+\varphi)^2+x^2}{4\pi^2}\right\};$$

. . . . . .

par conséquent

$$e^{2x} - 2\cos 2\varphi + e^{-2x} = 4\{\varphi^2 + x^2\} \times$$
$$\left\{\frac{(\pi-\varphi)^2+x^2}{\pi^2} \cdot \frac{(\pi+\varphi)^2+x^2}{\pi^2}\right\} \times$$
$$\left\{\frac{(2\pi-\varphi)^2+x^2}{\pi^2} \cdot \frac{(2\pi+\varphi)^2+x^2}{\pi^2}\right\} \times$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

375. Si dans cette équation on fait $x=0$, on aura

$$4\sin^2\varphi = 4\varphi^2\left\{1-\frac{\varphi^2}{\pi^2}\right\}^2\left\{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right\}^2\left\{1-\frac{\varphi^2}{9\pi^2}\right\}^2\cdots.$$

si on divise l'avant-dernière équation par celle-ci, on en déduira

$$e^{2x} - 2\cos 2\varphi + e^{-2x} =$$
$$4\sin^2\varphi\left\{1+\frac{x^2}{\varphi^2}\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(\pi-\varphi)^2}\right\} \times$$
$$\left\{1+\frac{x^2}{(\pi+\varphi)^2}\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(2\pi-\varphi)^2}\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(2\pi+\varphi)^2}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

376. La somme et la différence de deux exponentielles réciproques peut non-seulement se décomposer en un nombre infini de facteurs algébriques, mais on peut aussi exprimer de la même manière les fonctions

$$\{e^x + e^{-x}\} + \{e^y + e^{-y}\}$$
$$\{e^x + e^{-x}\} - \{e^y + e^{-y}\}$$
$$\{e^x - e^{-x}\} + \{e^y - e^{-y}\}$$
$$\{e^x - e^{-x}\} - \{e^y - e^{-y}\},$$

car ces formules équivalent respectivement à

$$2\{\cos . x\sqrt{-1} + \cos . y\sqrt{-1}\} = 4\cos\frac{(x+y)\sqrt{-1}}{2}\cos\frac{(x-y)\sqrt{-1}}{2};$$

$$2\{\cos . x\sqrt{-1} - \cos . y\sqrt{-1}\} = 4\sin\frac{(x+y)\sqrt{-1}}{2}\sin\frac{(x-y)\sqrt{-1}}{2};$$

$$2\{\sin . x\sqrt{-1} + \sin . y\sqrt{-1}\} = 4\sin\frac{(x+y)\sqrt{-1}}{2}\cos\frac{(x-y)\sqrt{-1}}{2};$$

$$2\{\sin . x\sqrt{-1} - \sin . x\sqrt{-1}\} = 4\sin\frac{(x-y)\sqrt{-1}}{2}\cos\frac{(x+y)\sqrt{-1}}{2};$$

ces transformations font voir aussi que si on multiplie ces expressions entr'elles, ou qu'on les divise, les résultats qu'on obtiendra seront aussi décomposables en facteurs.

377. Si on avait à décomposer $e^{ax} \pm e^{ay}$ en pro-

duits d'un nombre infini de facteurs, on remarquerait que cette expression est égale à

$$e^{x+y}\left\{e^{x-y} \pm e^{-x+y}\right\};$$

et comme l'expression qui est comprise dans la parenthèse peut se décomposer en un nombre infini de facteurs, l'expression proposée peut aussi se décomposer de la même manière; il en serait de même de l'expression

$$\frac{e^{2x} \pm e^{-2y}}{e^{2u} \pm e^{-2s}},$$

car elle équivaut à

$$e^{x+y-u-s}\left\{\frac{e^{x-y} \pm e^{-x+y}}{e^{u-s} \pm e^{-u+s}}\right\};$$

et comme le numérateur et le dénominateur de cette fraction peut se décomposer en produits d'un nombre infini de facteurs, l'expression proposée sera aussi décomposable en une infinité de facteurs.

378. Si on considérait le produit de deux facteurs semblables à ceux qu'on a divisés, on en déduirait des conséquences pareilles, car on a

$$\left(e^{2x} \pm e^{2y}\right)\left(e^{2u} \pm e^{2s}\right) =$$
$$e^{x+y+u+s}\left\{e^{x-y} \pm e^{-x+y}\right\}\left\{e^{u-s} \pm e^{-u+s}\right\}.$$

Théorème de Leibnitz.

379. Le théorême dont il s'agit ici consiste en ce que la fonction dérivée d'un ordre quelconque n du produit de tant de facteurs p, q, r, s, qu'on voudra, se compose d'autant de termes de la forme

$$\frac{1.2.3..n.p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta}.....}{1...\alpha.\ 1...\beta.\ 1...\gamma..1...\delta..}$$

qu'on peut satisfaire de fois en nombres entiers et positifs à l'équation

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots=n;$$

mais comme il est facile de ramener ce théorème considéré dans toute sa généralité, au cas où il n'y a que deux facteurs, nous nous occuperons seulement de celui-ci.

Si on prend la fonction prime du produit des deux facteurs p et q fonctions de x, on aura

$$(pq)'=pq'+p'q;$$

si des deux membres de cette équation on prend la fonction prime, on aura la fonction seconde du produit pq, ainsi cette fonction seconde sera donnée par l'équation

$$(pq)'=pq''+p'q'$$
$$p'q'+p''q$$

ou en réduisant

$$(pq)'' = pq'' + 2p'q' + p''q;$$

prenant la fonction prime des deux membres de cette équation, on aura la fonction tierce du produit pq; or, la fonction prime du second membre s'obtient en prenant la fonction prime de chacun de ses termes par rapport au second facteur qui se trouve dans chacun d'eux; puis en la prenant par rapport aux premiers et comme on la prend par rapport aux seconds, en affectant ces seconds facteurs d'un accent, de même qu'on l'obtient par rapport au premier en écrivant à sa droite un accent, on aura

$$(pq)''' = pq''' + 2p'q'' + p''q' + p'q + 2p''q' + p'''q,$$

ou en réduisant

$$(pq)''' = pq''' + 3p'q'' + 3p''q' + p'''q,$$

la marche qu'on vient de suivre suffit pour montrer ce qu'il y aurait à faire pour obtenir les fonctions dérivées des ordres plus élevés, en continuant on trouvera que les coefficiens numériques dans le second membre, sont les mêmes que ceux des termes du développement de la puissance d'un binome, c'est ce qu'il est facile d'éta-

blir en général; car, si la fonction dérivée de l'ordre n du produit pq est donnée par l'équation

$$(pq)^{(n)} = pq^{(n)} + Ap'q^{(n-1)} + Bp''q^{(n-2)} + \text{etc.},$$

celle de l'ordre immédiatement supérieur le sera par l'équation

$$(pq)^{(n+1)} = pq^{(n+1)} + \begin{array}{l|l|l} A & p'q^{(n)} + B & p''q^{(n-1)} + \text{etc.} \\ 1 & +A & + \text{etc.} \end{array}$$

par conséquent le coefficient numérique d'un terme quelconque, dans la fonction dérivée de l'ordre $n+1$, est égal au coefficient du même rang, dans la fonction dérivée de l'ordre n, augmenté du coefficient du terme précédent; et comme cette loi a lieu entre les coefficiens du binome, il en résulte que si pour une valeur de n, les coefficiens numériques des termes de la fonction dérivée $(pq)^{(n)}$ suivent la loi des coefficiens du binome; la même loi aura lieu lorsqu'on prendra la fonction dérivée de l'ordre $n+1$; et comme cette loi a lieu quand $n=2$, elle aura lieu encore lorsque n sera égal à 3, à 4, à 5, et ainsi de suite; ainsi elle aura lieu pour toutes les valeurs de n, par conséquent on aura, pour toutes les valeurs positives de n, l'équation

$$(pq)^{(n)} = pq^{(n)} + np\,q^{(n-1)} + \frac{n.n-1}{2}\,p''\,q^{(n-2)} + \ldots\ldots$$

Intégration des équations dérivées d'un ordre quelconque à coefficiens constans.

380. Lorsque le second membre de l'équation dérivée n'est point nul, il est facile de ramener la recherche de l'intégrale générale à celle d'une pareille équation dans laquelle le second membre est zéro; ainsi nous considérerons seulement l'équation.

$$y^{(n)} + Ay^{(n-1)} + B\,y^{(n-2)} + Cy^{(n-3)} \ldots\ldots + Ty = 0;$$

si on désigne par p, q, r,.... des fonctions de x qui jouissent de la propriété de satisfaire à l'équation précédente, elles y satisferont encore en multipliant ces fonctions, respectivement par des constantes a, b, c...; ainsi on aura

$$\begin{aligned}
ap^{(n)} + Aap^{(n-1)} + Bap^{(n-2)} + \ldots\ldots Tap &= 0\\
bq^{(n)} + Abq^{(n-1)} + Bbq^{(n-2)} + \ldots\ldots Tbq &= 0\\
cr^{(n)} + Acr^{(n-1)} + Bcr^{(n-2)} + \ldots\ldots Tcr &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

si on ajoute toutes ces équations, on en aura une qui sera égale au résultat de la substitution de $ap + bq + cr + \ldots$, à la place de y; par conséquent si on détermine autant de solutions particulières p, q, r....., qu'il est marqué par l'ordre de cette équation, on aura, en les multipliant

par des constantes arbitraires, et les ajoutant, une expression qui satisfera à l'équation proposée et qui sera l'intégrale générale, puisqu'elle renfermera autant de constantes arbitraires qu'il est marqué par l'ordre de l'équation. Il reste donc à déterminer les fonctions que nous avons désignées par p, q, r, etc. Or ces fonctions devant satisfaire séparément à l'équation dérivée dont il s'agit, il faut que les fonctions de x qu'elles représentent, donnent, pour les termes qui précèdent le dernier, une quantité égale et de signe contraire à ce dernier terme; ainsi l'hypothèse la plus naturelle à faire sur la nature de la fonction qu'on doit substituer pour y, est de la supposer telle qu'elle se reproduise dans les fonctions dérivées; si on pose $y'=my$, on aura, en supposant m constant,

$$\begin{aligned} y'' &= my' = m^2y \\ y''' &= m^2y' = m^3y \\ y^{IV} &= m^3y' = m^4y \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

si on substitue dans l'équation dérivée pour y', y'', y''', y^{IV}, les valeurs qu'on vient de trouver, on aura

$$y' \{ m^n + Am^{n-1} + Bm^{n-2} + .. + Tm \};$$

ainsi l'équation dérivée sera satisfaite, en dé-

terminant la quantité m, de manière à satisfaire à l'équation

$$m^n + Am^{n-1} + Bm^{n-2} + .. + Tm = 0;$$

mais de l'équation $y' = my$, on tire $\frac{y'}{y} = m$, d'où $l.y = mx + k$, et par suite $y = ce^{mx}$; si donc l'équation qui détermine les valeurs de m a toutes ses racines inégales, on aura un nombre n d'intégrales particulières, lesquelles étant multipliées par des constantes arbitraires et ajoutées, donneront l'intégrale générale.

Mais, si l'équation en m a plusieurs racines égales, on n'aura plus un nombre n d'intégrales particulières, par conséquent l'intégrale qui résultera de leur somme, après les avoir multipliées respectivement par des constantes arbitraires, ne contenant pas un nombre n de ces constantes, ne pourra être l'intégrale générale. Pour découvrir, dans le cas où il y a des racines égales, toutes les intégrales particulières qui satisfont à l'équation proposée, nous poserons $y = pe^{mx}$, p étant une fonction arbitraire de x et que nous déterminerons de manière à remplir notre objet, ensuite nous tirerons de cette équation les valeurs de $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$ .... au moyen du théorème de Léibnitz, puis nous les mettrons

avec celle de y dans l'équation

$$y^{(n)} + Ay^{(n-1)} + By^{(n-2)} + .. + Ty = 0,$$

et on trouvera qu'elle sera satisfaite lorsqu'on aura

$$\left.\begin{array}{l} p[m^n + Am^{n-1} + Bm^{n-2} + Cm^{n-3} + Dm^{n-4} + \ldots\ldots] \\ p'[nm^{n-1} + (n-1)Am^{n-2} + (n-2)Bm^{n-3} + \ldots\ldots] \\ \frac{p''}{2}[n(n-1)m^{n-2} + (n-1)(n-2)Am^{n-3} + \ldots\ldots] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

ou bien

$$pM + p'M' + \frac{p''}{2} M'' + \ldots\ldots = 0,$$

M représentant le polynome $m^n + Am^{n-1} + Bm^{n-2} + \ldots\ldots + Tm$ et M', M'', etc., les polynomes dérivés successifs de ce même polynome. Or on satisfera non-seulement à cette équation, en posant p égal constante, mais en posant $p^{(n-1)}$ égal à une constante que nous désignerons par a, car les coefficiens M, M', M'', M''', jusqu'à $M^{(r-1)}$, étant nuls, on aura à cause que le polynome M a un nombre r de racines égales à m, et que les fonctions dérivées de p supérieures à $r - 1$ sont nulles, l'équation suivante

$$pM + p'M' + \frac{p''}{2} M'' + \ldots\ldots = 0;$$

or de l'équation $p^{(n-1)} = a$, on tire par une suite d'intégrations successives, et en faisant abstraction des diviseurs qui peuvent être considérés comme étant compris dans les constantes arbitraires, l'équation

$$p = ax^{r-1} + a'x^{r-2} + a''x^{r-3} + \ldots + a^{(r-1)},$$

d'où

$$y = e^{mx}\{ax^{r-1} + a'x^{r-2} + a''x^{r-3} + \ldots + a^{(r-1)}\};$$

ainsi à chaque système de racines égales correspond un nombre de solutions particulières marqué par le nombre de ces racines, d'où il résulte qu'une équation dérivée d'un ordre quelconque, a toujours autant d'intégrales particulières et indépendantes qu'il est marqué par l'ordre de l'équation; ainsi en les multipliant respectivement par des constantes arbitraires et les ajoutant, on aura une expression qui contiendra autant de constantes arbitraires, qu'il est marqué par l'ordre de l'équation dérivée, et qui par conséquent sera l'intégrale générale de l'équation proposée.

...du théorème de Léibnitz, au cas ...ndices seraient entiers et négatifs; ...quences qui en résultent.

Nous avons vu que la formule qui donne ...tion dérivée d'un ordre quelconque du ...uit des deux facteurs p et q, résultait ... celle de la fonction dérivée d'un ordre moindre d'une unité, en augmentant dans cette dernière formule les indices des secondes lettres d'une unité, et en ajoutant au coefficient numérique de chaque terme le coefficient numérique du terme précédent; si donc on veut revenir de la formule qui donne la fonction dérivée d'un ordre quelconque du produit pq, à celle qui donne la fonction dérivée d'un ordre moindre d'une unité, il faudra dans la première formule diminuer les indices des secondes lettres dans chaque terme d'une unité, et retrancher du coefficient de chaque terme, dans la première formule, le coefficient numérique du terme qui occupe un rang moins avancé d'une unité dans celle qui exprime la fonction dérivée de l'ordre immédiatement moindre; ainsi puisqu'on a

$$(pq)^{(n)} = pq^{(n)} + np'q^{(n-1)} + \frac{n \cdot n-1}{2} p''q^{(n-2)} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} p'''q^{(n-3)} + \text{etc.};$$

la

la formule qui étant dérivée une fois, reproduira cette dernière, sera donnée par l'équation

$$(pq)^{(n-1)}=pq^{(n-1)}+(n-1)p'q^{(n-2)}+\frac{n-1\,.\,n-2}{2}p''q^{(n-3)}+$$
$$\frac{n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}{2\,.\,3}p'''q^{(n-4)}+\text{etc.};$$

ainsi il suffira de diminuer dans la première formule les facteurs n, $n-1$, $n-2$, etc., ainsi que les indices d'une unité. Si on veut passer de cette dernière formule à celle qui étant dérivée la reproduirait, il suffira de remplacer partout, tant dans les indices que dans les coefficiens, n en $n-1$, ce qui revient à changer dans la première n en $n-2$; en allant de proche en proche, on trouvera que pour passer de la première formule à celle qui étant dérivée un nombre r de fois la reproduirait, il suffit d'y changer n en $n-r$, quelque grand d'ailleurs que soit le nombre r; ainsi on aura

$$(pq)^{(n-r)}=pq^{(n-r)}+(n-r)p'q^{(n-r-1)}+$$
$$\frac{(n-r)(n-r-1)}{2}p''q^{(n-r-2)}+\text{etc.};$$

si dans cette dernière formule on fait $r=2n$, on aura

$$(pq)^{(-n)}=pq^{(-n)}-np'q^{(-n-1)}+\frac{n\,n+1}{1\,.\,2}p''q^{(-n-2)}-$$

$$\frac{n\,.\,n+1\,.\,n+2}{1\,.\,2\,.\,3}\,p^{n}q^{(-n-3)} + \text{etc.};$$

cette dernière formule est celle qui étant différentiée $2n$ fois, donnerait $(pq)^{(n)}$, ou, ce qui revient au même, celle qui étant différentiée n fois de suite, donnerait le produit pq; ainsi elle est l'intégrale de l'ordre n de ce produit: l'analyse qui nous y a conduits nous fournit l'interprétation des indices négatifs qui ne désignent rien que des fonctions inverses ou des intégrales de l'ordre marqué par le même indice pris positivement.

382. Si dans la dernière formule on remplace p par X et q par x^m, on en déduira

$$\int^n \mathrm{X} x^m dx =$$

$$\mathrm{X}.\frac{x^{m+n}}{(m+1)\ldots(m+n)} - \frac{n\,d\mathrm{X}}{1\,dx}\cdot\frac{x^{m+n+1}}{(m+1)\ldots(m+n+1)} +$$

$$\frac{n\,.\,n+1}{1\,.\,2}\cdot\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}\cdot\frac{x^{m+n+2}}{(m+1)\ldots(m+n+2)} -$$

$$\frac{n.n+1.n+2}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{d^3\mathrm{X}}{dx^3}\cdot\frac{x^{m+n+3}}{(m+1)..(m+n+3)} + \text{etc.};$$

si on fait dans cette formule $m=0, n=1$, on aura

$$\int \mathrm{X} dx = \text{const} + \mathrm{X}x - \frac{x^2}{2}\,.\,\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} - \text{etc.}$$

ce qui est la formule de Jean Bernoulli, laquelle est, par rapport au calcul intégral, ce que

là formule de Taylor est par rapport au calcul différentiel.

383. Si on fait dans la formule de Jean Bernoulli $X=x^m$, on aura

$$\int x^m dx =$$

$$x^{m+1}\left\{1-\frac{m}{2}+\frac{m.m-1}{2.3}-\frac{m.m-1m-2}{2.3.4}+\text{etc.}\right\};$$

or le second membre de cette équation est égal à

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{(m+1)-\frac{(m+1)m}{2}+\frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}-\text{etc.}\right\};$$

d'ailleurs le facteur qui est compris entre les deux accolades est égal et de signe contraire à la somme des termes qui suivent le premier dans le développement de $(1-1)^m$, ainsi il est égal à l'unité; par conséquent on aura

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{const.},$$

comme on l'obtient immédiatement par le procédé de l'intégration par parties; en effet on a

$$\int x^m dx = x^{m+1} - m\int x^m dx;$$

d'où l'on tire

$$(m+1)\int x^m dx = x^{m+1};$$

partant

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{const.}$$

384. Le théorème de Taylor est une suite immédiate du théorème de Bernoulli, en effet on a

$$\varphi a = \varphi (a - x + x) = \varphi (a - x) + P,$$

de cette équation on tire, en prenant la fonction prime des deux membres,

$$o = \varphi' (a - x) + P';$$

ainsi on aura

$$P = - \int dx \, \varphi' (a - x);$$

or en vertu du théorème de Bernoulli, on a, à cause de

$$\frac{d^{2n+1} \varphi (a - x)}{dx^{(2n+1)}} = - \varphi^{(2n+1)} x,$$

l'équation

$$\int dx \varphi' (a - x) =$$

$$x\varphi'(a-x) + \frac{x^2}{2} \varphi''(a-x) + \frac{x^3}{2.3} \varphi'''(a-x) + \text{etc.};$$

ainsi

$$\varphi (a) =$$

$$\varphi(a-x) + x\varphi'(a-x) + \frac{x^2}{2} \varphi''(a-x) + \frac{x^3}{2.3} \varphi'''(a-x) + \text{etc.}$$

il n'y a pas de constante à ajouter au second membre, parce que l'intégrale qui est égale à P, devient nulle quand on fait $x = o$. Si dans la dernière formule on représente $a - x$

par z, on aura

$$\varphi(z+x) = \varphi z + x\varphi' z + \frac{x^2}{2}\varphi'' z + \frac{x^3}{2.3}\varphi''' z + \text{etc.};$$

remplaçant dans cette formule z par x et x par i, elle deviendra

$$\varphi(x+i) = \varphi x + i\varphi' x + \frac{i^2}{2}\varphi'' x + \frac{i^3}{2.3}\varphi''' x + \text{etc.}$$

385. Le théorème qu'on vient de démontrer et qui sert au développement des fonctions en séries, peut s'obtenir d'une manière fort simple, sans avoir besoin de recourir à la série de Jean Bernoulli, en partant de l'équation

$$\varphi(x+i) = \varphi x + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \text{etc.},$$

dans laquelle les coefficiens p, q, r, sont des fonctions de x; en effet, si dans les deux membres de l'équation précédente on remplace x par $x+u$ et i par $i-u$, l'identité aura encore lieu; et comme par cette substitution le premier membre reste le même, le second membre ne changera pas, ainsi les coefficiens des diverses puissances de u dans ce second membre seront nuls; or chaque terme de ce second membre, tel que Mi^m, en produit deux, l'un qui résulte de la substitution

de $x+u$, au lieu de x dans M, et l'autre qui résulte de la substitution de $i-u$ à la place de i; si donc on désigne la fonction prime de chaque coefficient pris par rapport à x par ces mêmes coefficiens affectés d'un accent, on aura

$$0=\left\{\begin{array}{l}\varphi' x+p' i+q' i^2+r' i^3+s' i^4+\text{etc.}\\ -p-2qi-3ri^2-4si^3-\text{etc.}\end{array}\right\};$$

cette équation devant avoir lieu quel que soit i, elle se partagera dans les équations suivantes

$$\varphi x-p=0,\ p'-2q=0,\ q'-3r=0,\ r'-4s=0,\ldots.$$

de ces équations on tire

$$p=\varphi' x;\ q=\frac{1}{2}p'=\frac{1}{2}\varphi'' x;\ r=\frac{p'}{2}=\frac{1}{2.3}\varphi''' x;$$
$$s=\frac{r'}{4}=\frac{1}{2.3.4}\varphi^{IV} x;\ \ldots.$$

par conséquent on aura

$$\varphi(x+i)=\varphi x+i\varphi' x+\frac{i^2}{2}\varphi'' x+\frac{i^3}{2.3}\varphi''' x+\frac{i^4}{2.3.4}\varphi^{IV} x+\text{etc.}:$$

dans ce qui précède on a supposé la série prolongée indéfiniment, mais on peut la terminer à un terme quelconque et se proposer de trouver la fonction qui sert à compléter les

termes de ce développement; pour cela nous poserons

$$\varphi(x+i)=\varphi x+i\varphi' x+\frac{i^2}{2}\varphi'' x+\frac{i^3}{2.3}\varphi''' x+\ldots$$
$$+\frac{i^m}{2\ldots m}\varphi^{(m)}x+i^{(m+1)}\mathrm{P},$$

P étant une fonction de $x+i$ et de x, si on suppose comme ci-dessus que x se change en $x+u$ et i en $i-u$, on aura en prenant le coefficient de la première puissance de u dans les deux membres, et en désignant par $(\mathrm{P})'$ la fonction prime de P prise par rapport à x, $x+i$ étant considérée comme constante, l'équation suivante

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi' x+i\varphi'' x+\frac{i^2}{2}\varphi''' x+\frac{i^3}{2.3}\varphi'''' x+\ldots\frac{i^m}{1\ldots m+1}\varphi^{(m+1)}x+i^{m+1}(\mathrm{P})'\\ -\varphi' x-i\varphi'' x-\frac{i^2}{2}\varphi''' x-\frac{i^3}{2.3}\varphi'''' x-\ldots.-(m+1)i^m\mathrm{P}\end{array}\right\}=$$

ou en réduisant

$$-(m+1)\mathrm{P}+\frac{f^{(m+1)}x}{1\ldots m}+i(\mathrm{P})'=0,$$

d'où

$$\mathrm{P}=\frac{f^{(m+1)}x}{1\ldots m+1}+\frac{i}{m+1}(\mathrm{P})';$$

or si on prenait un terme de plus, on aurait

$$\mathrm{P}=\frac{f^{(m+1)}x}{1\ldots m+1}+iQ;$$

d'où

$$Q = \frac{(P)'}{m+1};$$

parconséquent lorsqu'on aura la fonction complémentaire d'un certain nombre de termes du développement, il sera facile d'obtenir celle qui correspond au même développement pris avec un terme de plus; et comme pour les fonctions algébriques on peut trouver la fonction complémentaire qui suit le premier terme du développement, il sera facile de trouver toutes les autres.

386. Lorsque les fonctions qu'on développe sont transcendantes, il n'y a aucun moyen exact d'obtenir la fonction complémentaire sous une forme qui permette d'en faire usage, à cause qu'on n'a aucun moyen d'obtenir le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable sous une forme finie qui ne devienne point $\frac{0}{0}$ lorsqu'on suppose que l'accroissement de la fonction est nul, c'est pourquoi il sera utile, au défaut de cette fonction complémentaire, d'évaluer l'erreur qu'on peut commettre lorsque dans une série on s'arrête à un nombre fini de termes : c'est à quoi on arrivera facilement si on considère qu'on a en vertu de ce qui précède

$$(i^{m+1}\mathrm{P})' = -\frac{i^m \varphi^{(m+1)}x}{1\ldots m};$$

car si on suppose $x + i = a$, on aura

$$[(a-x)^{m+1}\mathrm{P}]' = -\frac{(a-x)^m}{1\ldots m}\varphi^{(m+1)}x;$$

or $(a-x)^{m+1}\mathrm{P}$ exprime l'aire d'une courbe dont l'ordonnée serait la fonction prime de cette quantité ; si donc on construit une courbe dont l'ordonnée soit égale à

$$\frac{-(a-x)^m \varphi^{(m+1)}x}{1\ldots m},$$

l'aire comprise entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses a et $a-x$, sera la valeur exacte de $[(a-x)^{m+1}\mathrm{P}]'$, c'est-à-dire du reste de la série dont il s'agit.

Si on désigne par M et N la plus grande et la plus petite valeur que prend $\varphi^{(m+1)}x$ lorsqu'on fait passer la variable x par tous les états intermédiaires entre a et $a-i$, et que l'on construise les courbes pour lesquelles les ordonnées seraient

$$-\frac{(a-x)^m}{1\ldots m}\mathrm{M} \quad \text{et} \quad -\frac{(a-x)^m}{1\ldots m}\mathrm{N},$$

il est clair que la première courbe ne pourra

avoir aucun point au-dessous de celle dont l'ordonnée serait $-\frac{(a-x)^m\varphi^{m+1}x}{1\ldots m}$, et que la seconde courbe ne peut en avoir aucun au-dessus de cette même courbe ; par conséquent cette dernière courbe est située entre les deux autres, et son aire est comprise entre elles ; or l'aire de la courbe dont l'ordonnée est $-\frac{(a-x)^m}{1\ldots m}$ M étant exprimée par $\frac{(a-x)^{m+1}}{1\ldots m+1}$ M, et celle dont l'ordonnée est $-\frac{(a-x)^m}{1\ldots m}$ N étant égale à $-\frac{(a-x)^{m+1}}{1\ldots m+1}$ N, il en résulte que la valeur exacte de $(a-x)^{m+1}$P est comprise, abstraction faite du signe, entre $\frac{(a-x)^{m+1}}{1\ldots m+1}$ M et $\frac{(a-x)^{m+1}}{1\ldots m+1}$ N, et qu'elle est égale au produit de $\frac{(a-x)^{m+1}}{1\ldots m+1}$ par une quantité intermédiaire entre la plus grande et la plus petite des valeurs de $\varphi^{(m+1)}x$, prise entre les limites $(a-i)$ et a, c'est-à-dire à une certaine valeur de $\varphi^{m+1}x$, correspondante à une valeur de x, prise depuis $x=a-i$, jusqu'à $x=a$, ou bien à une valeur de x égale à $x+j$ intermédiaire entre x et $x+i$; par conséquent on aura

$$\varphi(x+i)=\varphi x+i\varphi' x+\frac{i^2}{2}\varphi'' x+\frac{i^3}{2.3}\varphi''' x+\ldots\ldots$$

$$+\frac{i^m}{2..m}\varphi^{(m)}x+\frac{i^{m+1}}{1\ldots m+1}\varphi^{m+1}(x+j);$$

387. Au moyen de cette série les développemens des fonctions connues se réduisent à trouver les fonctions dérivées consécutives des fonctions simples. Si on considère les puissances, on aura, § 218, en posant

$$\varphi x=x^m,\ \varphi' x=mx^{m-1},\ \varphi'' x=m.m-1x^{m-2};\ \ldots\ldots$$

par conséquent

$$(x+i)^m=x^m+mx^{m-1}i+\frac{m.m-1}{2}x^{m-2}+$$

$$\ldots\ldots+\frac{m.m-1\ldots m-m+1}{1.2\ldots\ldots n}i^n(x+i)^{m-n},$$

j étant une quantité comprise entre o et i. Si dans cette formule on remplace j successivement par o et i, on aura deux résultats, l'un plus petit, l'autre plus grand que la fonction proposée, ce qui suffit pour juger du degré d'approximation auquel on est arrivé.

388. Si on fait $\varphi x=a^x$, on aura, d'après le § 231,

$$\varphi' x=a^x la,\ \varphi'' x=a^x l^2 a,\ \varphi''' x=a^x l^3 a,$$

et ainsi de suite; si donc on substitue pour φx et les fonctions dérivées successives de cette fonction leurs valeurs dans la série de Taylor, on aura

$$a^{x+i} = a^x + ia^x la + \frac{i^2}{2} a^x l^2 a + \ldots \frac{i^n}{2 \ldots n} a^{x+j} l^n a;$$

si dans cette série on fait $x = 0$ et qu'ensuite on change i en x, on aura

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2}{2} l^2 a + \frac{x^3}{2.3} l^3 a + \text{etc.}$$

389. Si on fait $\varphi x = lx$, on aura, à cause que

$$\varphi' x = \frac{1}{x}, \quad \varphi'' x = -\frac{1}{x^2}, \quad \varphi''' x = \frac{x^3}{2}, \quad \varphi^{IV} x = -\frac{x^4}{2.3},$$

l'équation

$$l(x+i) = lx + \frac{i}{x} - \frac{i^2}{2x^2} + \frac{i^3}{3x^3} - \ldots \pm \frac{i^n}{n(x+j)^n},$$

j étant comme ci-dessus compris entre 0 et i.

390. Enfin si on pose $\varphi x = \sin x$, on aura, en vertu du § 292, les équations

$$\varphi' x = + \cos x, \quad \varphi'' x = - \sin x,$$
$$\varphi''' x = - \cos x, \quad \varphi^{IV} x = + \sin x,$$
$$\varphi^{V} x = + \cos x, \quad \varphi^{VI} x = - \sin x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

par conséquent

$$\sin(x+i)=\sin x+i\cos x-\frac{i^2}{2}\sin x-\frac{i^3}{2.3}\cos x+\frac{i^4}{2.3.4}\sin x+\text{etc.}$$

Si dans cette série on fait $x=0$, $\sin x=0$ et $\cos x=1$, ainsi on aura

$$\sin i=i-\frac{i^3}{2.3}+\frac{i^5}{2..6}-\frac{i^7}{2...7}+\text{etc.};$$

si dans la même série on change $x+i$ en $\frac{\Pi}{2}-x-i$, ce qui revient à changer x en $\frac{\Pi}{2}-x$ et i en $-i$, on aura

$$\cos(x+i)=\cos x-i\sin x-\frac{i^2}{2}\cos x+\frac{i^3}{2.3}\sin x+\text{etc.};$$

si dans cette équation, on fait $x=0$, on aura, à cause de $\cos x=1$ et $\sin x=0$, l'équation suivante

$$\cos i=1-\frac{i^2}{2}+\frac{i^4}{2.3.4}-\text{etc.};$$

pour avoir les limites de $\sin i$ et de $\cos i$, il est clair qu'il faudra prendre pour l'exposant de i le nombre immédiatement plus grand d'une unité que celui de i dans le terme auquel on veut s'arrêter.

Evaluation de l'aire d'un rectangle.

291. Lorsqu'on a l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires, on obtient l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et deux ordonnées quelconques, en remontant de l'expression de l'ordonnée exprimée au moyen de l'abscisse à la fonction dont cette ordonnée est la fonction dérivée. L'application de ce principe au cas où l'équation de la ligne donnée serait celle d'une droite est extrêmement simple et fait tomber sur les résultats que la Géométrie fournit immédiatement, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison de cette droite sur l'axe des abscisses; malgré cet accord des résultats obtenus par l'Analyse et la Géométrie pour toutes les inclinaisons de la droite, il convient néanmoins d'observer qu'on ne peut rien conclure lorsque cette droite devient parallèle à l'axe, puisque la démonstration du principe sur lequel on s'appuie pour arriver au théorème fondamental des quadratures repose sur celui de l'évaluation de l'aire d'un rectangle : c'est pour compléter le premier théorème, que nous allons chercher à établir le second sur des principes rigoureux qui soient

indépendans des considérations géométriques qu'on emploie communément.

Pour y arriver, nous observerons que quelle que soit l'expression d'un rectangle, elle doit nécessairement dépendre de la base et de la hauteur, puisque l'une ou l'autre de ces quantités venant à varier, l'aire du rectangle varie; si donc on désigne respectivement par x et y les rapports de la base et de la hauteur du rectangle dont il s'agit avec la base et la hauteur de celui qu'on prend pour unité de mesure, l'expression de la surface sera une fonction de x et de y que nous représenterons en général par $F(x, y)$; pour voir de quelle manière les quantités x et y entrent dans $F(x, y)$, nous les ferons varier successivement; supposons d'abord que la base x devienne $x + x'$, la hauteur y restant la même, on aura un nouveau rectangle dont l'aire sera exprimée par $F(x + x')$; or ce rectangle peut être considéré comme étant composé de deux rectangles qui auraient pour hauteur commune y, et dont la base de l'un serait x, et la base de l'autre x', le premier de ces rectangles étant exprimé par $F(x, y)$ et le second par $F(x, y)$ le rectangle total le sera par $F(x, y) + F(x', y)$,

de sorte qu'on aura l'identité

$$F(x, y) + F(x', y) = F(x + x', y);$$

si on développe le second membre suivant les puissances ascendantes de x, en regardant y comme constant, on aura, après les réductions faites,

$$F(x, y) = xF'(x', y) + \text{etc.}$$

Or le premier membre étant indépendant de x' le second membre doit l'être, par conséquent les coefficiens des différentes puissances de x se réduisent à des constantes fonctions de y, mais la condition de $F'(x, y) =$ constante, rend nulles toutes les fonctions dérivées des ordres plus élevés, on aura donc

$$F(x, y) = x\varphi y.$$

Supposons maintenant que y devienne $y + y'$, on aura un rectangle qui aura pour expression $x\varphi(y + y')$, mais son aire peut aussi se représenter par $x\varphi y + x\varphi y'$, puisqu'elle est égale à la somme de deux rectangles qui ont même base x et dont y est la hauteur de l'un et y' la hauteur de l'autre, ainsi on aura

$$x\varphi y + x\varphi y' = x\varphi(y + y'),$$

d'où

d'où l'on tire

$$\varphi y + \varphi y' = \varphi(y+y') = \varphi y + y'\varphi' y + \frac{y'^2}{2}\varphi'' y + \text{etc.},$$

ce qui donne $\varphi y = Ay$, par conséquent $F(x,y) = Axy$; pour déterminer la constante A, il n'y a qu'à concevoir que les quantités x et y deviennent respectivement égales à leur unité de mesure, auquel cas l'expression Axy devra se réduire à l'unité, ce qui ne pourra avoir lieu, à moins qu'on ait $A = 1$, donc $F(x, y) = xy$, résultat connu.

On démontrerait de la même manière que le volume d'un rhomboïde rectangle est égal au produit de ses trois dimensions. On pourrait aussi démontrer que l'aire d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de deux côtés contigus par le sinus de l'angle compris.

392. Le théorème dont on vient de s'occuper peut encore se démontrer de la manière suivante.

Soit représenté comme précédemment par $F(x, y)$ l'aire d'un rectangle dont la base serait x et la hauteur y; si on considère deux nouveaux rectangles ayant même hauteur que

le premier, et dont la base de l'un soit $x+i$ et la base de l'autre $x-i$, leur somme sera égale au double de celui dont la base est x, de sorte qu'on aura quel que soit i, en n'ayant égard qu'à la variabilité de x,

$$2Fx = F(x+i) + F(x-i);$$

si on développe le second membre et qu'on réduise, on aura

$$0 = 2\left\{\frac{i^2}{2}F''x + \text{etc.}\right\}.$$

Cette égalité devant se vérifier indépendamment d'aucune valeur particulière de i, il faut que les coefficiens des diverses puissances de i soient nuls, ce qui exige qu'on ait $F''a = 0$, ainsi $F'x = K$, et par suite

$$Fx = Kx + L,$$

K et L sont des constantes qu'il faut déterminer par la considération de quelques cas particuliers; quand la base est nulle, l'aire du rectangle est nulle, ainsi $L = 0$; par conséquent la hauteur restant la même, le rectangle varie dans le même rapport que la base. Quant à la quantité K, elle est constante par rapport à y mais va-

riable par rapport à y, puisqu'elle devient nulle quand $y = 0$, si on la désigne par φy, l'aire du rectangle sera exprimée par $x\varphi y$. Cela posé, si on conçoit deux rectangles qui aient une même base x que le premier, et dont les hauteurs respectives soient $y + w$ et $y - w$, leur somme sera évidemment égale au double de celui dont la base est a et la hauteur y, de sorte qu'on aura

$$2x\varphi y = x\varphi(y+w) + x\varphi(y-w),$$

divisant par x, développant et réduisant, on aura

$$0 = 2\left\{\frac{w^2}{2}\varphi''y + \frac{w^4}{2.3.4}\varphi^{IV}y + \text{etc.}\right\};$$

et comme cette égalité doit se vérifier quel que soit w, il faut que les coefficiens des diverses puissances de w soient nuls, ce qui exige qu'on ait $\varphi y = 0$, par conséquent $\varphi' y = A$, et par suite

$$\varphi y = Ay + B;$$

mais comme φy s'évanouit quand $y = 0$, on a $B = 0$, ainsi

$$\varphi y = Ay,$$

partant

$$F(x, y) = x\varphi y = Axy.$$

La constante A se détermine comme on l'a vu plus haut, on la trouve égale à l'unité, et

on a

$$F(x,y) = xy.$$

PROBLÈME.

Trouver la direction et la grandeur de deux forces qui agissent à-la-fois sur un point matériel, et dont les directions font entre elles un angle quelconque.

393. Avant de nous livrer à cette recherche nous allons faire voir que deux forces qui agissent à-la-fois sur un point matériel ne peuvent se faire équilibre, à moins qu'elles ne soient égales et directement opposées; en effet si l'équilibre pouvait avoir lieu entre deux forces x et x' dont les directions ne seraient pas directement opposées (*fig.* 8), cet équilibre serait rompu par l'intervention d'une nouvelle force x'' opposée à x, et le corps se mouvrait suivant cette direction; mais ce système de forces, envisagé d'une autre manière, présente une conclusion différente, car les deux forces x et x'' étant égales et directement opposées se font équilibre, le point matériel est donc dans le même état que s'il était uniquement soumis à l'action de la force x'; il devrait donc obéir à l'action de cette force, et se mouvoir suivant sa direction, c'est-à-dire que le point matériel

pourrait prendre plusieurs chemins à-la-fois, ce qui est absurde; on voit donc qu'un point matériel qui est sollicité par deux forces, ne peut être en équilibre, à moins qu'elles ne soient directement opposées; de plus, l'équilibre ne peut avoir lieu lorsque cette condition est remplie, à moins qu'elles ne soient égales; car si elles étaient inégales, on pourrait concevoir la plus grande décomposée en deux autres, dont l'une serait égale à la plus petite et dont l'autre serait égale à la différence; et comme la première de ces deux forces serait détruite par la plus petite, il resterait encore pour mouvoir le point une force égale à la différence des deux premières forces, de sorte qu'il se mouvrait dans le sens de la plus grande des deux forces avec une intensité égale à la différence des deux forces primitives.

394. Revenons maintenant à notre question, le cas le plus simple est celui où les deux forces seraient égales; dans ce cas, le point sur lequel elles agissent étant sollicité de la même manière par chacune d'elles, il n'y a pas de raison pour qu'il s'approche plutôt de la direction de l'une que de l'autre; par conséquent la direction de la résultante divisera en deux également l'angle

que forment les directions des composantes; si les composantes sans cesser d'être égales viennent à varier de grandeur, la résultante variera aussi en supposant que l'angle reste le même; car si les composantes de ce qu'elles étaient, deviennent respectivement égales à $x+y$, il faudra, pour avoir la résultante générale, chercher la résultante des deux forces égales à x, celles des deux forces égales à y, et les combiner entre elles; mais comme ces résultantes particulières agissent dans la direction d'une même droite, elles s'ajoutent, par conséquent la résultante de deux forces égales varie avec ces forces.

395. Si au lieu de faire varier les forces on fait varier l'angle qu'elles font entr'elles, la résultante variera nécessairement; car si aux deux composantes que nous désignerons par x et x', *fig.* 9, on oppose deux forces qui leur soient égales, on aura un système composé de quatre forces qui se feront mutuellement équilibre; si on conçoit maintenant que l'angle des dernières forces que nous nommerons y et y', augmente sans cesser de faire des angles égaux avec les forces x et x', les quatre forces cesseront nécessairement de se faire équilibre, car l'angle

des deux forces x et x' étant moindre que le supplément de l'angle des deux forces x et x', la direction de la résultante des deux forces x' et y', fera avec x' un angle moindre que la moitié de ce supplément, et par conséquent fera avec la résultante z un angle moindre qu'un droit; et comme la résultante des deux forces x et y est égale à celle des deux forces x' et y', et qu'elle fera avec la résultante z de x et x' le même angle que fait cette résultante avec celle des forces x' et y', il s'ensuit que la résultante des quatre forces sera dirigée dans le sens de la résultante des forces x et x', puisque les deux forces auxquelles nous avons ramené le système font entre elles un angle moindre que deux droits, donc la résultante des deux forces x et x' est plus grande que celle des deux forces y et y'; donc la résultante de deux forces diminue à mesure que l'angle de ces deux forces augmente, et elle augmente à mesure que l'angle diminue.

396. Pour avoir la grandeur de la résultante, nous observerons que la résultante variant avec les forces, l'angle restant le même aussi bien que lorsque l'angle varie, les forces ne changeant pas, il s'ensuit que la résultante dépend à la fois des forces qui agissent sur le point, et de l'angle

que fait l'une des composantes avec cette résultante; on aura donc, en représentant cette résultante par z, l'équation

$$z = F(x, \alpha),$$

x désignant une des composantes, et α l'angle qu'elle forme avec la résultante; cela posé, si x devient y, z devient z', et on a

$$z' = F(y, \alpha);$$

si les forces x et y agissent à-la-fois, les résultantes particulières s'ajoutent, et on a pour la résultante des forces $x+y$

$$F(x, \alpha) + F(y, \alpha);$$

d'un autre côté cette résultante est égale à

$$F(x+y, \alpha),$$

on a donc l'équation

$$F(x, \alpha) + F(y, \alpha) = F(x+y, \alpha);$$

si on développe le second membre par rapport aux puissances ascendantes de x, en regardant α comme constant, on trouvera après les réductions faites

$$F(x, \alpha) = xF'(y, \alpha) + \frac{x^2}{2} F''(y, \alpha) + \text{etc.};$$

or, le premier membre étant indépendant de y, le second membre doit l'être aussi; il faut

donc que les coefficiens des différentes puissances de x se réduisent à des constantes fonctions de α; mais la condition de $F'(y, \alpha) =$ const. rend nulles toutes les fonctions dérivées d'un ordre supérieur au premier, de sorte qu'on a seulement

$$F(x, \alpha) = x\varphi\alpha,$$

$\varphi\alpha$ étant une fonction inconnue de α que nous chercherons à déterminer : cette équation nous montre que la résultante varie proportionnellement aux composantes, lorsque l'angle reste le même.

C'est à quoi on pouvait encore arriver autrement, car si on conçoit le point matériel sollicité par deux forces égales à $x+i$, on aura une résultante qui sera exprimée, en faisant abstraction de l'angle, par $F(x+i)$; si on ajoute à ces composantes de nouvelles forces égales à $x-i$, elles donneront une résultante qui sera exprimée par $F(x-i)$; ainsi la résultante totale sera exprimée par

$$F(x+i) + F(x-i);$$

mais les composantes qui agissent sur une même droite, équivalent à $2x$, ainsi elles donneront une résultante double de celles que

donneraient deux forces égales à x; par conséquent on aura

$$2Fx = F(x+i) + F(x-i);$$

si on développe le second membre par rapport aux puissances de i, on aura, toutes réductions faites,

$$0 = \frac{i^2}{2} F''x + \text{etc.};$$

cette équation devant avoir lieu quel que soit i, il faut qu'on ait $F''x = 0$, par conséquent $F'x = c$, et par suite $Fx = cx + c'$; quand $x = 0$, la résultante z est nulle; ainsi $c' = 0$, par conséquent $z = ci = x\varphi\alpha$, comme on l'a déjà vu.

397. Pour déterminer la nature de la fonction φ, imaginons qu'on oppose aux deux composantes x deux forces qui leur soient respectivement égales, il est clair que la résultante des deux premières forces sera détruite par celle des deux dernières; mais si on conçoit que celles-ci, sans cesser de faire avec les premières des angles égaux, s'écartent de leur résultante d'une quantité i et que les deux premières se rapprochent chacune de leur résultante de la même quantité, il est clair, à cause que la résultante des

deux premières est égale à $x\varphi(\alpha+i)$ et que celle des deux dernières est égale à $x\varphi(\alpha-i)$, et que la résultante totale qui est la différence de ces deux-ci sera égale à

$$x\varphi(\alpha-i)-x\varphi(\alpha+i);$$

or les deux forces égales x et y *fig.* 10 qui sont situées du même côté de la résultante générale donnent une résultante particulière égale à

$$x\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

il en est de même de celle des deux forces x' et y' qui se trouvent situées de l'autre côté de la résultante générale; et comme ces deux résultantes particulières font, avec la résultante générale un angle égal à $\frac{\pi}{2}-i$, elles donneront une résultante qui sera exprimée par

$$x\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\varphi\left(\frac{\pi}{2}-i\right),$$

par conséquent on aura en désignant

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \text{ et } \varphi\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$$

par $F\alpha$ et Fi, l'équation suivante

$$F\alpha Fi=\varphi(\alpha-i)-\varphi(\alpha+i)=-2\left\{i\varphi'\alpha+\frac{i^3}{2.3}\varphi'''x+\text{etc.}\right\}.$$

Si on divise les deux membres par $F\alpha$, on aura

$$Fi = -2\left\{ i\frac{\varphi'\alpha}{F\alpha} + \frac{i^3}{2.3}\frac{\varphi'''\alpha}{F\alpha} + \frac{i^5}{2.3.4.5}\frac{\varphi^v\alpha}{F\alpha} + \text{etc.} \right\};$$

le premier membre de cette équation étant indépendant de α, le second membre doit aussi en être indépendant, par conséquent les coefficiens des diverses puissances de i doivent se réduire à des constantes, ainsi on aura $\varphi'\alpha = -a F\alpha$, c'est-à-dire que la fonction prime de $\varphi\alpha$ est égale à une quantité qui reste la même pour tous les angles, multipliée par la fonction semblable du complément de cet angle que nous avons désigné par $F\alpha$, ainsi on aura

$$F'\alpha = \varphi'\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = a\varphi\alpha;$$

cette équation combinée avec la première donne

$$\varphi''\alpha = -aF'\alpha = -a^2\varphi\alpha; \varphi'''\alpha = a^2\varphi'\alpha = +a^3F\alpha;$$
$$\varphi^{IV}\alpha = +a^3F'\alpha = +a^4\varphi\alpha; \varphi^v\alpha = a^4\varphi'\alpha = -a^5F\alpha,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si on porte dans l'équation

$$Fi = -2\left\{ i\frac{\varphi'\alpha}{F\alpha} + \frac{i^3}{2.3}\frac{\varphi'''\alpha}{F\alpha} + \frac{i^5}{2..5}\frac{\varphi^v\alpha}{F\alpha} + \text{etc.} \right\};$$

au lieu des fonctions dérivées des ordres im-

pairs de $\varphi\alpha$ leurs valeurs, on aura

$$Fi = 2\left\{ai - \frac{a^3 i^3}{2.3} + \frac{a^5 i^5}{2\ldots5} - \text{etc.}\right\} = 2\sin ai;$$

donc

$$F\alpha = 2\sin a\alpha;$$

par conséquent

$$F\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ ou } \varphi\alpha = 2\sin a\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

partant

$$z = 2x\sin a\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$$

si dans cette équation on fait $\alpha = 0$, on aura, à cause que dans cette hypothèse on a $z = 2x$, l'équation $2x = 2x\sin a\frac{\pi}{2}$, donc $\sin aq = 1$; or les arcs pour lesquels les sinus sont égaux à l'unité, sont les multiples d'une circonférence, augmentée d'un quadran, ainsi on aura

$$a = 4n + 1,$$

par conséquent

$$z = 2x\sin(4n+1)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= 2x\sin\left\{\frac{\pi}{2} - (4n+1)\alpha\right\} = 2x\cos(4n+1)\alpha;$$

si on suppose que l'angle α se change en $\frac{q}{4n+1}$, q représentant ici un quadran, la résultante

z sera donnée par l'équation

$$z = 2x \cos(4n+1)\frac{q}{4n+1} = 2x \cos q,$$

et comme $\cos q = 0$, on aura quel que soit x, $z=0$; d'ailleurs l'équilibre ne peut avoir lieu entre deux forces, à moins qu'elles ne soient directement opposées, ainsi on aura $\frac{q}{4n+1} = q$, par conséquent $n=0$, d'où il suit que

$$z = 4x \cos \alpha.$$

398. Pour trouver la résultante de deux forces inégales, nous commencerons par traiter le cas où les forces agiraient à angles droits, car le problème de la composition de tant de forces qu'on voudra à direction quelconque et agissant dans le même plan, pourra s'y ramener. En effet, si dans le plan de ces forces on conçoit deux axes rectangulaires qui aient pour origine le point sollicité, on pourra à chaque force en substituer deux dirigées suivant ces axes; la résultante générale du système de forces que l'on considère sera donc ramenée ainsi que nous l'avons dit, à celle de deux forces rectangulaires, dont chacune serait la somme des forces estimées suivant les axes.

Désignons par x et y les forces dont il s'agit, par z leur résultante, et par α l'angle qu'elle fait avec la composante x; si nous concevons une droite indéfinie qui fasse avec x, et de l'autre côté de la direction de la résultante, un angle égal à α, elle fera avec y un angle égal à $1^r - \alpha$, c'est-à-dire que les forces x et y diviseront en deux également les angles formés par cette droite et la direction de la résultante; on pourra donc à ces deux forces en substituer quatre autres parmi lesquelles deux seront dirigées en sens contraires, et les deux autres dans le même sens; or, de ces quatre forces les deux premières doivent nécessairement se détruire, sans quoi la force qui en résulterait contrarierait le point et l'empêcherait de se mouvoir suivant la direction de la droite qui a été prise pour être la direction de la résultante et suivant laquelle les deux autres agissent, on aura donc

$$x = 2x' \cos\alpha \text{ et } y = 2x' \cos(1^r - \alpha) = 2x' \sin\alpha;$$

d'où l'on tire

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\,\alpha \text{ et } 2x' = z = \frac{x}{\cos\alpha};$$

399. Si on veut peindre par la Géométrie les ré-

sultats d'analyse auxquels nous venons d'arriver, on verra que la diagonale du rectangle construit sur les directions de ces forces, et sur des parties proportionnelles à ces forces, représente en direction et en grandeur la résultante de ces forces.

400. Passons maintenant au cas où les forces seraient quelconques, et agiraient dans le même plan; pour cela, traçons dans ce plan deux axes rectangulaires, et nommons P', P'', P''', etc. ces forces. Si R désigne leur résultante, que α soit l'angle que forme cette résultante avec l'axe des x, on aura en la décomposant suivant ces axes, deux forces qu'on obtiendra en décomposant celles qui sont données suivant x et y et ajoutant avec leurs signes celles qui agissent suivant un même axe; si donc on désigne respectivement par α', α'', α''', etc., les angles que font les forces P', P'', P''', etc., avec l'axe des x, elles donneront suivant cet axe des composantes qui seront exprimées respectivement par $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$, $P''' \cos \alpha'''$, etc., et suivant l'axe des y, des composantes qui seront $P' \sin \alpha'$, $P'' \sin \alpha''$, $P''' \sin \alpha'''$, etc.; et comme d'ailleurs les composantes de la résultante R, suivant ces mêmes axes, sont ex-

primées par $R\cos\alpha$ et $R\sin\alpha$, on aura les deux équations

$$R\cos\alpha = P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' \text{ etc.},$$
$$R\sin\alpha = P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + P'''\sin\alpha''' \text{ etc.},$$

lesquelles suffisent pour déterminer R et α.

401. Pour avoir la résultante d'un système de forces qui agissent sur un point matériel, et dont les directions sont situées d'une manière quelconque dans l'espace, il faut concevoir trois axes rectangulaires qui aient pour origine le point sollicité, et décomposer chaque force suivant les trois axes; par ce moyen, la composition d'un nombre quelconque de forces se réduira à trouver celle d'un système de forces rectangulaires.

402. Pour décomposer une force suivant trois axes perpendiculaires entr'eux, il faut prendre sur la direction de la force, et à partir du point sur lequel cette force agit, une partie qui la représente, puis abaisser de l'extrémité de cette ligne deux perpendiculaires, l'une sur le premier axe, l'autre sur la projection de la droite qui est comprise dans le plan des deux autres axes, car ces deux perpendiculaires détermineront deux forces qu'on pourra substituer à la première; mais de ces deux forces, celle

qui n'agit point suivant la direction d'un des axes, peut se décomposer en deux autres, dirigées suivant les deux autres axes; et comme ces deux-ci sont les projections de la force suivant ces mêmes axes, il en résulte que les composantes suivant les trois axes sont les projections de la première force suivant ces mêmes axes; si donc on désigne par P′ cette force, par α', β', γ', les angles qu'elle fait respectivement avec les axes des x, y, z, les composantes de cette force, suivant ces trois axes, seront $P' \cos \alpha'$, $P' \cos \beta'$, $P' \cos \gamma'$; ainsi à une force on peut en substituer trois dirigées suivant trois axes perpendiculaires et respectivement égales au produit de la première force par les cosinus des angles qu'elles font avec chacun de ces axes; ainsi à un sytème de forces on peut en substituer trois autres qui agissent suivant les directions de trois axes rectangulaires, et comme les composantes qui agissent suivant un même axe s'ajoutent, il en résulte que si on désigne les forces par P′, P″, P‴, etc., et les angles qu'elles font respectivement avec les axes des x, y, z, par les lettres α, β, γ, affectées d'un nombre d'accens marqué par celui de la lettre qui représente la force, on aura, en représentant la résultante de toutes ces forces par

R et par α, β, γ; les angles que fait cette résultante avec les axes, les trois équations

$$R\cos\alpha = P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \text{etc.}$$
$$R\cos\beta = P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \text{etc.}$$
$$R\cos\gamma = P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + P'''\cos\gamma''' + \text{etc.}$$

c'est-à-dire, que la résultante d'un nombre quelconque de forces qui agissent sur un point matériel, estimée suivant chacun des axes rectangulaires, est égale à la somme des produits des forces par les cosinus des angles qu'elles font respectivement avec les trois axes.

403. L'une ou l'autre des trois équations précédentes traduite en géométrie, fait voir que la résultante s'obtiendra en menant par l'extrémité de la droite qui représente la première force, une droite égale et parallèle à la seconde, par l'extrémité de celle-ci, une droite égale et parallèle à la troisième, et ainsi de suite; l'extrémité de la dernière de ces lignes déterminera celle de la résultante. Si les forces se font équilibre, les équations précédentes deviennent

$$0 = P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \text{etc.}$$
$$0 = P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \text{etc.}$$
$$0 = P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + P'''\cos\gamma''' + \text{etc.}$$

mais alors le dernier côté du polygone des

forces étant nul, il en résulte, à cause que les côtés de ce polygone sont égaux et parallèles aux forces, que la somme des produits de chaque côté du polygone par les cosinus des angles que font ces côtés avec une droite tracée d'une manière quelconque dans l'espace, est égale à zéro.

404. Comme un polygone quelconque plan ou gauche peut toujours être regardé comme résultant de la composition d'autant de forces égales et parallèles aux côtés du polygone qu'il y a de côtés dans ce polygone, lorsque ces forces se font équilibre, il s'ensuit que la somme des produits de chaque côté d'un polygone quelconque par les cosinus des angles que font respectivement ces côtés avec une droite tracée d'une manière quelconque dans l'espace, est égale à zéro.

405. De ce qui vient d'être dit § 402, il résulte un moyen très-simple d'obtenir les formules qui servent à passer d'un système de coordonnées obliques dans l'espace, à un système de coordonnées rectangulaires ; en effet, si on conçoit une force qui agisse à l'origine commune des deux systèmes de coordonnées, et que son intensité soit représentée en gran-

deur et en direction par la droite menée de cette origine au point que l'on considère, elle pourra se décomposer en trois forces représentées en grandeur et en direction, par les coordonnées obliques de ce point comptées sur le premier système d'axes; si on décompose ces trois forces suivant les trois axes rectangulaires, on aura trois forces suivant chacun de ces axes, qui équivaudront aux composantes de la force primitive suivant ces mêmes axes, et qui, par conséquent seront représentées par les coordonnées rectangulaires du point dont il s'agit. Si donc on représente les coordonnées rectangulaires de ce point par x, y, z, et les coordonnées obliques par x', y', z', et que l'on désigne respectivement par α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; les angles que font les anciens axes avec les nouveaux, on aura

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma;$$
$$y = x' \cos \alpha' + y' \cos \beta' + z' \cos \gamma';$$
$$z = x' \cos \alpha'' + y' \cos \beta'' + z' \cos \gamma'';$$

406. De ces formules on pourrait facilement déduire celles qui servent à passer d'un système de coordonnées obliques à un autre système de coordonnées obliques; mais comme il n'est point de notre objet de les présenter, nous ne nous y arrêterons point.

407. Si les anciens axes et les nouveaux sont perpendiculaires, on aura, pour passer des nouveaux axes aux anciens, la relation

$$x' = x\cos\alpha + y\cos\alpha' + z\cos\alpha'';$$
$$y' = x\cos\beta + y\cos\beta' + z\cos\beta'';$$
$$z' = x\cos\gamma + y\cos\gamma' + z\cos\gamma''.$$

408. De ces mêmes formules on peut déduire facilement l'équation d'un plan. En effet, si d'un point quelconque d'un plan, on abaisse une perpendiculaire sur le plan des xy, et que par la projection de ce point sur ce dernier plan, on mène une droite parallèle à l'axe des x et terminé à l'axe des y, on aura les coordonnées du point pris sur le plan, si on projette les trois coordonnées de ce point sur la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur ce plan, la somme de ces projections sera égale à cette perpendiculaire, et par conséquent sera toujours la même; or la somme des projections des coordonnées est égale à la somme des produits des coordonnées par les cosinus des angles qu'elles font respectivement avec cette perpendiculaire, ou, ce qui revient au même, par les cosinus des angles que font les axes de même dénomination avec cette perpendiculaire; et

comme ces angles sont respectivement égaux à ceux que fait le plan dont il s'agit avec celui auquel la coordonnée est perpendiculaire, il en résulte que si on désigne ces angles par α, β, γ, et par P la perpendiculaire, on aura pour un point quelconque du plan,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = P.$$

Si le plan passe par l'origine, cette équation devient

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0.$$

409. Si aux quatre angles d'un quadrilatère quelconque ABCD, *fig.* 10, dont les côtés sont ou ne sont pas situés dans un même plan, on applique des forces parallèles A, B, C, D qui soient proportionnelles entr'elles, de manière qu'on ait A:B::D:C, on aura, en représentant la force D par mA, C$=m$B; cela posé, si on divise la droite AB en E, de manière que les parties de cette droite soient réciproquement proportionnelles aux forces appliquées en A et B, le point E sera le point d'application de la résultante de ces deux forces; de même si on divise la droite CD en F, de manière qu'on ait AE:BE::DF:CF, le point F sera le point d'application de la résultante des deux forces

appliquées en C et D; donc la résultante des quatre forces A, B, C, D aura son point d'application sur la droite EF, quelle que soit d'ailleurs la direction des forces, pourvu qu'elles ne cessent point d'être parallèles entr'elles; de plus ce point d'application divisera la droite EF en parties réciproquement proportionnelles à $A+B$ et $C+D$, c'est-à-dire dans le rapport réciproque des forces A et D. Si on considère le système d'une autre manière, et que l'on combine les deux forces appliquées en A et D, elles donneront une résultante qui divisera la ligne AD en parties réciproquement proportionnelles à ces forces en H, et sera égale à la somme $A+D$ des composantes; de même la résultante des deux forces B et C divisera la ligne BC en parties réciproquement proportionnelles à ces forces au point G; donc la résultante des quatre forces divisera la ligne GH qui joint les points d'application des deux résultantes particulières en parties réciproquement proportionnelles aux forces $B+C$ et $A+D$, ou, ce qui revient au même, $::A:B$, ou bien encore, $::BE:AE$; ainsi le point d'application de la résultante des quatre forces devant se trouver à-la-fois sur la droite EF et sur la droite GH, quelle que soit d'ailleurs la

direction des forces qui est celle de la résultante générale, il faut que ces deux droites se coupent en un même point, et qu'elles se coupent de manière que les parties de chacune d'elles soient dans le rapport des segmens correspondans des côtés opposés du quadrilatère; ce qui fournit le théorème XVI du cinquième livre de la Géométrie de M. Legendre. On peut même lui donner une plus grande extension en supposant que les forces parallèles n'agissent point toutes dans le même sens.

Il est aisé de voir aussi qu'on démontrerait de la même manière, que les droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère quelconque, et celle qui joint les milieux des diagonales, se coupent en un même point.

410. Si plusieurs forces agissent sur un système de corps, suivant des directions parallèles dans le même sens, on sait que le moment de la résultante sera égal à la somme des momens des composantes; si donc on conçoit des forces qui agissent dans le même sens et suivant des directions parallèles appliquées aux différens angles d'un polyèdre régulier ou d'un polygone régulier, on aura

$$nF \times P = F\,(P' + P'' + P''' + \text{etc.}),$$

F désignant une des forces, n leur nombre, P la distance du point d'application de la résultante au plan ou à l'axe des momens, et P′, P″, P‴, etc., les distances respectives des points d'application des composantes à cet axe, en divisant les deux membres par nF, on aura $P = \frac{P' + P'' + P''' + \text{etc.}}{n}$, c'est-à-dire que la distance du point d'application de la résultante, qui est évidemment le centre de la sphère inscrite ou du cercle inscrit au plan ou à l'axe, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées des angles de ce polygone sur ce même plan ou ce même axe, divisée par le nombre des côtés de ce polygone.

411. Si on prend pour plan des momens une des faces mêmes du polyèdre, lorsque les forces sont appliquées aux sommets des angles d'un polyèdre, ou un des côtés du polygone, lorsque les forces sont appliquées aux sommets des angles du polygone, on en conclura, dans le premier cas, que le rayon de la sphère inscrite est égal à la somme des perpendiculaires abaissées des sommets des différens angles du polyèdre sur une des faces divisée par le nombre des angles du polyèdre, et dans le second cas, que le rayon du cercle inscrit est égal à la somme

des perpendiculaires abaissées des sommets des angles du polygone, sur un des côtés, divisée par le nombre des côtés du polygone.

412. Le raisonnement que nous avons fait ci-dessus, § 410, peut servir à démontrer que la distance du centre de gravité d'un triangle à une droite ou à un plan, est le tiers de la somme des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle, sur la droite ou sur le plan, et que la distance du centre de gravité d'une pyramide triangulaire, est égale au quart de la somme des perpendiculaires abaissées des sommets de ses angles sur un plan de position quelconque.

413. Les conséquences déduites précédemment nous fournissent l'occasion de remarquer, en passant, combien il est utile de suivre par la Géométrie les résultats d'analyse auxquels on arrive, car les résultats qu'on en retire, ne se bornent pas seulement à nous rendre sensibles ces résultats, et à étendre nos facultés intellectuelles par le développement des particularités qu'on y remarque, mais encore à nous diriger quelquefois dans le choix des moyens à employer pour arriver vers le but de nos recherches de la manière la plus simple.

Décomposition des fractions rationnelles en d'autres fractions dont les numérateurs sont constans, et dont les dénominateurs sont les facteurs simples du dénominateur.

414. Il peut arriver que les facteurs simples dans lesquels se décompose le dénominateur soient tous inégaux, tous égaux, ou en partie égaux et en partie inégaux.

415. Si tous les facteurs sont inégaux et que le numérateur de la fraction proposée soit la fonction dérivée exacte du dénominateur, cette fraction sera évidemment la fonction dérivée du logarithme du dénominateur. Si donc ce dénominateur est le produit des facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$, etc., cette même fraction sera égale à la fonction dérivée du logarithme du produit de $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, ou, ce qui revient au même, à la fonction dérivée de la somme des logarithmes de ces facteurs; et par conséquent égale à $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \text{etc.}$ Ainsi dans ce cas particulier, la décomposition de la fraction proposée en fractions de l'espèce demandée se présente d'elle-même, et n'offre

d'autres difficultés que celles qui tiennent à la décomposition du dénominateur en facteurs du premier degré, c'est-à-dire à la détermination des racines des équations.

416. S'il arrivait, ce qui a lieu le plus souvent, que le numérateur ne fût point la fonction dérivée exacte du dénominateur, la décomposition de la fraction proposée en fractions de l'espèce demandée n'en aurait pas moins lieu; toute la différence qu'il y aurait, c'est que les numérateurs des fractions partielles, au lieu d'être tous égaux entr'eux comme précédemment, ne le seraient point. Si donc on représente par $\frac{\varphi x}{\psi x}$ une fraction irréductible dont le numérateur soit d'une dimension moins élevée que le dénominateur, et que l'on représente par A, B, C, etc. les numérateurs des fractions partielles qui ont pour dénominateurs les facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. dans lesquels se décompose le dénominateur de la fraction proposée, on aura

$$\frac{\varphi x}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \text{etc.}$$

Si on fait disparaître les dénominateurs, on obtiendra l'équation

$$\varphi x = A(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots$$
$$+ B(x-a)(x-c)(x-d)\ldots\ldots$$
$$+ C(x-a)(x-b)(x-d)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette équation fait voir que le numérateur de la fraction proposée se compose de la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. multipliés respectivement par les numérateurs des fractions partielles qui ont pour dénominateurs le facteur simple qu'il faudrait y introduire pour avoir le produit de tous les dénominateurs.

417. Si dans l'équation précédente on substitue pour x l'une quelconque des racines a, b, c, d, etc. tous les produits $m-1$ à $m-1$ dans lesquels se trouve le facteur qui correspond à la racine substituée disparaissent, et il ne reste plus du second membre que le produit dans lequel ce facteur ne se trouve pas multiplié par le numérateur de la fraction qui correspond à ce facteur, et dans lequel on a substitué la racine du dénominateur de la fraction partielle

que l'on veut évaluer. Ainsi on aura pour déterminer les numérateurs A, B, C, etc., des fractions partielles. Que l'on considère les équations suivantes,

$$\varphi a = A(a-b)(a-c)(a-d)\ldots$$
$$\varphi b = B(b-a)(b-c)(b-d)\ldots$$
$$\varphi c = C(c-a)(c-b)(c-d)\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

418. Les facteurs par lesquels sont multipliés les numérateurs des fractions partielles dans les équations précédentes sont évidemment ce que devient la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc., lorsque pour x on y substitue la racine du dénominateur de la fraction partielle qui correspond au numérateur que l'on veut évaluer: or la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. est évidemment le coefficient de la première puissance de i dans le produit de $(i+x-a)(i+x-b)(i+x-c)\ldots$, ou, ce qui revient au même, le coefficient de la première puissance de i dans le produit de $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, ou du dénominateur de la fraction proposée, lorsque pour x on y

substitue $i + x$ ou $x + i$; et comme ce coefficient est la fonction dérivée du dénominateur, il en résulte que le numérateur de l'une quelconque des fractions partielles s'obtiendra en divisant le numérateur de la fraction proposée par la fonction dérivée du dénominateur de cette même fraction, et substituant au lieu de x la racine du dénominateur de la fraction partielle dont on veut avoir le numérateur.

419. Considérons maintenant le cas où tous les facteurs du dénominateur seraient égaux. Si on représente par $\frac{\downarrow x}{(x-a)^m}$ la fraction proposée dans laquelle le numérateur $\downarrow x$ est une fonction entière et rationnelle de x, on aura

$$\frac{\downarrow x}{(x-a)^m} = \frac{\downarrow(a+x-a)}{(x-a)^m}.$$

Si donc on développe le numérateur du second membre de cette équation, par rapport aux puissances de $x-a$ d'après le théorème de Taylor, on aura, en faisant les réductions convenables, l'équation suivante,

$$\frac{\downarrow x}{(x-a)^m} = \frac{\downarrow a}{(x-a)^m} + \frac{\downarrow' a}{(x-a)^{m-1}} + \frac{\frac{1}{2}\downarrow'' a}{(x-a)^{m-2}} + \frac{\frac{1}{2.3}\downarrow''' a}{(x-a)^{m-3}} + \text{etc.}$$

dans

dans laquelle on voit parfaitement que dans le cas dont il s'agit, la fraction proposée peut toujours se décomposer en une suite d'autres fractions dont les numérateurs sont constans et dont les dénominateurs sont les puissances successives de $x - a$. On voit de plus que le numérateur d'une des fractions partielles est égal à une fonction dérivée du numérateur de l'ordre marqué par le complément de l'exposant du dénominateur de la fraction que l'on considère, à celui du dénominateur de la fraction proposée, divisée par le produit de la suite naturelle des nombres jusqu'à celui qui indique l'ordre de la dérivation, et dans laquelle on substitue a à la place de x.

420. Il ne reste plus qu'à considérer le cas où le dénominateur de la fraction proposée contiendrait à la fois des facteurs égaux et des facteurs inégaux. Soit $\frac{fx}{\varphi x}$ une fraction irréductible dans laquelle le numérateur est d'un degré moindre que le dénominateur; si on suppose que le facteur $x - a$ se trouve un certain nombre de fois dans le dénominateur, de sorte qu'on ait

$$\varphi x = (x - a)^m fx.$$

on aura

$$\frac{\downarrow x}{\varphi x} = \frac{1}{(x-a)^{m-1}} \cdot \frac{\downarrow x}{(x-a)fx};$$

or le numérateur de la fraction $\frac{\downarrow x}{(x-a)fx}$ n'étant point d'un degré inférieur au dénominateur, on peut faire la division jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste d'un degré moindre que ce dénominateur; soit Q ce quotient et R le reste, on aura

$$\frac{\downarrow x}{\varphi x} = \frac{1}{(x-a)^{m-1}} \left\{ Q + \frac{R}{(x-a)fx} \right\}.$$

Si on fait

$$\frac{R}{(x-a)fx} = \frac{A}{x-a} + \frac{S}{fx};$$

ce qui est toujours possible, on aura en faisant pour abréger $Qfx + S = X$

$$\frac{\downarrow x}{(x-a)^m fx} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{X}{(x-a)^{m-1} fx};$$

on aura de même

$$\frac{X}{(x-a)^{m-1} fx} = \frac{B}{(x-a)^{m-1}} + \frac{X_1}{(x-a)^{m-2} fx}$$

$$\frac{X_1}{(x-a)^{m-2} fx} = \frac{C}{(x-a)^{m-3}} + \frac{X_2}{(x-a)^{m-3} fx};$$

et ainsi de suite; par conséquent on aura

$$\frac{\downarrow x}{\varphi x} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{B}{(x-a)^{m-1}} + \frac{C}{(x-a)^{m-2}} + \ldots + \frac{\Pi x}{fx},$$

c'est-à-dire qu'une fraction dont le dénominateur contient une puissance quelconque d'un binome peut se décomposer en une suite de fractions dont les numérateurs sont constans, et dont les dénominateurs sont les puissances successives de ce binome, plus une fraction dont le numérateur peut contenir la variable et dont le dénominateur se compose du produit des autres facteurs.

L'artifice de calcul que nous venons d'employer et à l'aide duquel on assigne la nature des fractions partielles qui correspondent aux facteurs simples des dénominateurs, a été employé dans une circonstance tout-à-fait semblable, par les PP. Lesueur et Jacquier. Voyez leur Calcul Intégral.

421. Si on réduit les premières fractions au même dénominateur et que l'on représente leur somme par $\frac{Fx}{(x-a)^m}$, on aura

$$\frac{\downarrow x}{(x-a)^m fx} = \frac{Fx}{(x-a)^m} + \frac{\Pi x}{fx}$$

faisant disparaître les dénominateurs, substi-

tuant $a+y$ au lieu de x et développant, par rapport aux puissances de y, on aura

$$\downarrow a+y\downarrow' a+\frac{y^2}{2}\downarrow'' a+\frac{y^3}{2.3}\downarrow''' a+\text{etc.}=$$

$$\left\{Fa+yF'a+\frac{y^2}{2}F''a+\text{etc.}\right\}\left\{fa+yf'a+\frac{y^2}{2}fa''+\text{etc.}\right\}$$

$$+\left\{\Pi a+y\Pi' a+\frac{y^2}{2}\Pi'' a+\text{etc.}\right\}y^n.$$

Si on effectue les opérations indiquées et que l'on compare les coefficiens des termes affectés des mêmes puissances de y jusqu'à celle dont l'exposant est $n-1$, on aura les équations suivantes

$$\downarrow a = Fa\,fa$$
$$\downarrow' a = Fa\,f'a + F'a\,fa$$
$$\downarrow'' a = Fa\,f''a + 2F'a\,f'a + F''a\,fa,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et en général

$$\downarrow^{(n)} a = Faf^{(n)}a + nF'af^{(n-1)}a + \frac{n.n-1}{2}F''af^{(n-2)}a + \text{etc.}$$

formule dont la loi est facile à saisir et qui servira à déterminer les fonctions dérivées de Fa, ou les numérateurs des fractions partielles

dans lesquelles se décompose la fraction $\frac{Fx}{(x-a)^m}$, lorsqu'on aura déterminé Fa, $F'a$, $F''a$, etc., ainsi que les fonctions dérivées de fa des ordres inférieurs à celles qu'on veut obtenir.

422. Pour déterminer fa, $f'a$, $f''a$, etc. reprenons l'équation

$$(x-a)^m fx = \varphi x.$$

Si on y substitue $a+y$ au lieu de x, on aura

$$y^m\left\{fa+yf'a+\frac{y^2}{2}f''a+\text{etc.}\right\}=$$

$$\varphi a+y\varphi' a+\frac{y^2}{2}\varphi'' a+\frac{y^3}{2\cdot 3}\varphi''' a+\text{etc.}$$

comparant les coefficiens des puissances semblables de y, on trouvera que les fonctions dérivées de φx des ordres inférieurs à m, sont toutes nulles lorsque pour x on y substitue a, puisque le second membre ne peut contenir de puissances de y inférieures à celles qui se trouvent dans le premier, on trouvera de plus que

$$fa=\frac{\varphi^{(m)}a}{1\ldots m}$$

$$f'a=\frac{\varphi^{(m+1)}a}{1..m+1}$$

$$\frac{f''a}{2}=\frac{\varphi^{(m+2)}a}{1\ldots\ldots m+2}$$

et en général

$$\frac{f^{(p)}a}{1.....p} = \frac{\phi^{(m+p)}a}{1.....m+p}$$

Substituant dans l'expression générale de $\int^n a$ trouvée ci-dessus pour fa, $f'a$, $f''a$, etc. les valeurs qu'on vient de trouver, et divisant les deux membres par $1.....p$, on aura

$$\frac{\int^{(p)}a}{1.....p} = Fa\,\frac{\phi^{(m+p)}a}{1...m+p} + F'a\,\frac{\phi^{(m+p-1)}a}{1...m+p-1}$$

$$+\frac{F''a}{1.2}\,\frac{\phi^{(m+p-2)}a}{1...m+p-2} + \text{etc.}$$

dans le cas particulier de $p = 0$ et de $m = 1$ on trouve que $Fa = \frac{\int a}{\phi' a}$, ce qui est la formule trouvée plus haut pour déterminer le numérateur de la fraction partielle qui correspond au facteur $x - a$, lorsqu'il ne se trouve qu'une seule fois au dénominateur de la fraction proposée.

423. On peut encore présenter cette théorie de la manière suivante. Soit comme ci-dessus $\frac{\int x}{\phi x}$ une fraction rationnelle en x et dans laquelle le numérateur est d'un degré moindre que le dénominateur; si on suppose que ce dénomi-

nateur soit du degré p et qu'il contienne le facteur $x-a$ un nombre n de fois, et que de plus on substitue $a+y$ au lieu de x tant au numérateur qu'au dénominateur, elle se changera en une autre, dans laquelle le dénominateur ne pourra contenir de puissances de y inférieures à n, de sorte qu'elle sera égale à

$$\frac{\downarrow a+y\downarrow' a+\frac{y^2}{2}\downarrow'' a+\frac{y^3}{2.3}\downarrow''' a+\text{etc.}+\frac{y^{p-1}\downarrow^{(p-1)}a}{2\ldots p-1}}{\frac{y^n\phi^n a}{2\ldots n}+\frac{y^{n+1}\phi^{(n+1)}a}{2\ldots n+1}+\frac{y^{n+2}\phi^{(n+2)}a}{2\ldots n+2}+\text{etc.}\frac{y^p\phi^{(p-1)}}{2\ldots p}}$$

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par z, et qu'ensuite on fasse $zy=1$, elle se changera dans la suivante,

$$\frac{z^p\downarrow a+z^{p-1}\downarrow' a+z^{p-2}\frac{\downarrow'' a}{2}+\text{etc.}+z\frac{\downarrow^{(p-1}a)}{2\ldots p-1}}{z^{p-n}\frac{\phi^{(n)}a}{2\ldots n}+z^{p-n-1}\frac{\phi^{(n+1)}}{2\ldots n+1}+\ldots+\frac{\phi^{(p)}a}{2\ldots p}}$$

Le numérateur de cette fraction étant d'un degré plus élevé que le dénominateur, on peut effectuer la division et la pousser jusqu'à ce qu'on soit parvenu dans le quotient à un terme qui soit de même degré que la plus faible puissance de z dans le numérateur. Si on repré-

sente ce quotient par

$$Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + \ldots\ldots + Pz,$$

et qu'on désigne le reste par R, on aura une équation qui, étant débarrassée des dénominateurs, donnera par la comparaison des termes affectés des mêmes puissances de z, les équations suivantes.

$$\psi a = A \frac{\varphi^{(n)}a}{1\ldots\ldots n}$$

$$\psi' a = A \frac{\varphi^{(n+1)}a}{1\ldots n+1} + B \frac{\varphi^{(n)}a}{1\ldots\ldots n}$$

$$\tfrac{1}{2}\psi'' a = A \frac{\varphi^{(n+2)}a}{1\ldots n+2} + B \frac{\varphi^{(n+1)}a}{1\ldots n+1} + C \frac{\varphi^{(n)}a}{1\ldots\ldots n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

lesquelles rentrent, comme il est facile de le voir, dans celles que nous avons données plus haût, et desquelles il sera facile de tirer successivement les valeurs de A, B, C, etc.; les valeurs de ces quantités étant ainsi déterminées, si on substitue, tant dans le quotient que dans le reste $\frac{1}{y}$ au lieu de z et $x - a$ au lieu de y, on aura,

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \frac{C}{(x-a)^{n-2}} + \text{etc.} + \frac{\Pi x}{fx}$$

fx étant ce que devient φx lorsqu'on a supprimé dans ce dénominateur tous les facteurs égaux à $x-a$ et Πx étant un polynome d'un degré inférieur à fx, mais qu'il n'est point nécessaire de déterminer pour obtenir les numérateurs des fractions qui correspondent aux autres fractions.

424. Avant d'aller plus loin, il convient de faire voir que quelle que soit la manière de procéder à la détermination des numérateurs des fractions partielles, le résultat est toujours le même; en effet, si on désigne par A, B, C, D.... les numérateurs des fractions partielles qui correspondent aux facteurs égaux à $x-a$ que la fraction proposée renferme, et que A', B', C', D'..... soient ceux des fractions du second système, on aura

$$\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{B}{(x-a)^{n-1}}+\frac{C}{(x-a)^{n-2}}+\ldots+\frac{\Pi x}{fx}=$$
$$\frac{A'}{(x-a)^n}+\frac{B'}{(x-a)^{n-1}}+\frac{C'}{(x-a)^{n-2}}+\ldots+\frac{\Theta x}{fx},$$

or si on multiplie les deux membres de cette équation par $(x-a)^n$, on aura

$$A+B(x-a)+C(x-a)^2+\ldots+\frac{\Pi x}{fx}(x-a)^n=$$
$$A'+B'(x-a)+C'(x-a)^2+\ldots+\frac{\Theta x}{fx}(x-a)^n.$$

Si dans cette équation on fait $x = a$, on aura $A = A'$; supprimant dans cette équation A et A', on aura, en divisant les deux membres par $x - a$ et faisant $x = a$, on aura $B = B'$; en continuant à raisonner de la même manière on en déduira $C = C'$, et ainsi de suite; d'où il résulte que les fractions partielles qui correspondent aux facteurs $x - b, x - c, x - d, \ldots$ déduites de la fraction $\frac{\Pi x}{fx}$ sont les mêmes que celles qu'on obtiendrait si on opérait immédiatement sur la fraction primitive $\frac{\psi x}{\varphi x}$.

425. La décomposition des fractions rationnelles en fractions d'une espèce plus simple est d'un usage très-étendu dans l'analyse et surtout dans la théorie des suites : nous allons montrer celui qu'on peut en faire pour trouver le développement en série de la fraction $\frac{1}{1 + e \cos v}$ ordonnée par rapport aux cosinus des multiples de l'angle v.

426. Si on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par 2, et qu'on substitue $y + \frac{1}{y}$ au lieu de $2 \cos v$, on aura

$$\frac{1}{1 + e \cos v} = \frac{2}{2 + e\left\{y + \frac{1}{y}\right\}}$$

où

$$\frac{1}{1+e\cos v}=\frac{\frac{2}{e}y}{y^2+\frac{2}{e}y+1}.$$

Le dernier terme du dénominateur de la fraction qui compose le second membre de cette dernière égalité étant égal à l'unité, il s'ensuit que les racines de ce dénominateur sont réciproques l'une de l'autre; par conséquent si l'un des facteurs dans lesquels se décompose ce dénominateur est $y+\lambda$, l'autre sera $y+\frac{1}{\lambda}$. Si donc on suppose que la fraction soit décomposée en deux autres dont les dénominateurs soient respectivement $y+\lambda$ et $y+\frac{1}{\lambda}$, on aura, en désignant par A et B leurs numérateurs, l'équation

$$\frac{\frac{2}{e}y}{y^2+\frac{2}{e}y+1}=\frac{A}{y+\lambda}+\frac{B}{y+\frac{1}{\lambda}};$$

faisant disparaître les dénominateurs, et substituant successivement $-\lambda$ et $-\frac{1}{\lambda}$ au lieu de y dans l'équation qui en résulte, et qui est

$$\frac{2}{e}y=A\left(y+\frac{1}{\lambda}\right)+B(y+\lambda),$$

on en déduira

$$A=-\frac{2}{e}\cdot\frac{\lambda}{\frac{1}{\lambda}-\lambda} \quad \text{et} \quad B=\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}-\lambda}$$

Or

$$\lambda=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda}=\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{e}$$

par conséquent,

$$A=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\lambda \quad \text{et} \quad B=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

ainsi la fraction proposée est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\left\{\frac{\lambda^{-1}}{y+\lambda^{-1}}-\frac{\lambda}{y+\lambda}\right\}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\left\{\frac{1}{1+\lambda y}-\frac{\lambda y^{-1}}{1+\lambda y^{-1}}\right\}$$

or

$$\frac{1}{1+\lambda y}=1-\lambda y+\lambda^2y^2-\lambda^3y^3+\text{etc.}$$

et

$$\frac{\lambda y^{-1}}{1+\lambda y^{-1}}=\lambda y^{-1}-\lambda^2y^{-2}+\lambda^3y^{-3}-\text{etc.};$$

donc

$$\frac{1}{1+\lambda y}-\frac{\lambda y^{-1}}{1-\lambda y^{-1}}=$$

$$1-\lambda\left(y+\frac{1}{y}\right)+\lambda^2\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-\text{etc.};$$

mais puisque $y + \frac{1}{y} = 2\cos\nu$, $y^m + \frac{1}{y^m} = 2\cos m\nu$; si donc on substitue pour $y + \frac{1}{y}$ $y^2 + \frac{1}{y^2}$, etc., leurs valeurs $2\cos\nu$, $2\cos 2\nu$, etc., on aura

$$\frac{1}{1 + e\cos\nu} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\{1 - 2\lambda\cos\nu + 2\lambda^2\cos 2\lambda - \text{etc.}\}$$

427. Il est facile de voir que dans cette formule les coefficiens des cosinus des multiples impairs de l'angle ν ne renferment que des puissances impaires de e et que les coefficiens des cosinus des multiples pairs du même angle ne renferment que des puissances paires de la même quantité; car le premier membre restant le même lorsqu'on change e en $-e$ et ν en $200^\circ - \nu$, puisqu'on a toujours, quelles que soient les grandeurs de e et de ν,

$$\frac{1}{1 + e\cos\nu} = \frac{1}{1 - e\cos(200^\circ - \nu)};$$

il s'ensuit que le second membre doit encore rester le même lorsqu'on y substituera à la fois $200 - \nu$ au lieu de ν et $-e$ au lieu de e. Or le résultat de la substitution de $200 - \nu$ au lieu de ν ne changeantrien aux signes des mul-

tiples pairs de l'angle, il faut que le résultat de la substitution de $-e$ au lieu de e, n'opère aucun changement dans leurs coefficiens, et que par suite ils ne renferment que des puissances paires de e; au contraire la substitution de $200 - \nu$ au lieu de ν faisant changer de signe les cosinus des multiples impairs de l'angle, il faut que leurs coefficiens changent de signe lorsque pour e on y substitue $-e$, ce qui ne peut avoir lieu à moins qu'ils ne renferment que des puissances impaires de cette même quantité; c'est ce qui résulte d'ailleurs de l'expression que nous avons trouvée pour λ, car le changement de e en $-e$ dans la fraction $\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}$ faisant changer le signe de λ, fait aussi changer celui de toutes les puissances impaires de cette même quantité, tandis qu'au contraire les puissances paires ne changent point de signe, et que de plus la fraction $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ reste la même lorsque pour e on met $-e$; ainsi le résultat du calcul prouve ce qu'on pouvait conclure d'avance.

428. La série que nous avons considérée ci-dessus, se présente dans un grand nombre d'ap-

plications et particulièrement dans la Théorie du mouvement elliptique. Voyez le premier volume de la Mécanique céleste et le Traité d'Astronomie de M. Delambre.

429. Si on avait à intégrer $\frac{dv}{1 + e \cos v}$, on le pourrait facilement au moyen des séries, puisqu'il suffirait de multiplier tous les termes du développement de la fraction $\frac{1}{1 + e \cos v}$ par dv et d'intégrer chaque terme en particulier; mais on peut obtenir cette intégrale rigoureusement et en termes finis, ainsi que celle de toute expression rationnelle algébrique entière ou fractionnaire de *sin* v et de *cos* v qu'on peut représenter par $dv \downarrow (\sin v, \cos v)$, c'est à quoi on arrivera facilement si on considère que les trois quantités dv, $\sin v$, $\cos v$ peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'une nouvelle variable, car on a

$$\sin v = \frac{2 \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v}{\cos^2 \frac{1}{2} v + \sin^2 v} = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} v}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v}$$

$$\cos v = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} v - \sin^2 \frac{1}{2} v}{\cos^2 \frac{1}{2} v + \sin^2 \frac{1}{2} v} = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v}$$

$$dv = \frac{2 d. \frac{1}{2} v}{\cos^2 \frac{1}{2} v + \sin^2 \frac{1}{2} v} = \frac{2 \frac{d. \frac{1}{2} v}{\cos^2 \frac{1}{2} v}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v};$$

mais

$$\frac{d.\ \frac{1}{2}\nu}{\cos^2\frac{1}{2}\nu} = d\ .\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\nu\ ;$$

ainsi

$$d\nu = \frac{2d\ .\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\nu}{1+\text{tang}^2\ \frac{1}{2}\nu}\ ;$$

si donc on désigne tang $\frac{1}{2}\nu$ par x, on aura

$$\sin\nu = \frac{2x}{1+x^2},\ \cos\nu = \frac{1-x^2}{1+x^2}\ \text{et}\ d\nu = \frac{dx}{1+x^2}\ ;$$

par conséquent si on remplace dans la différentielle, $d\nu \downarrow (\sin\nu, \cos\nu)$ pour $d\nu$, $\sin\nu$, et $\cos\nu$ leurs valeurs en x, l'intégrale cherchée sera ramenée à trouver celle d'une fonction différentielle algébrique, laquelle se trouvera par les méthodes connues.

430. On pourrait par les transformations précédentes intégrer une expression de la forme $d\nu \sin^m\nu \cos^n\nu$, mais le procédé de l'intégration par parties qu'on emploie communément, conduit plus rapidement au but lorsque m et n ont des valeurs entières propres à faire dépendre l'intégrale proposée de... $\frac{d\nu}{\sin\nu\cos\nu}$, de $\frac{d\nu}{\sin\nu}$ ou de $\frac{d\nu}{\cos\nu}$; or ces dernières s'obtiennent facilement, car $\frac{d\nu}{\sin\nu\cos\nu}$ étant égal

égal à $\frac{\frac{dv}{\cos^2 v}}{\text{tang } v} = \frac{d \,.\, \text{tang } v}{\text{tang } v}$, on aura

$$\int \frac{dv}{\sin v \cos v} = \int \frac{d \,.\, \text{tang } v}{\text{tang } v} = \log. \text{ tang } v + \text{const.},$$

quant aux deux autres intégrales, elles se ramènent facilement à cette dernière, car on a

$$\frac{dv}{\sin v} = \frac{dv}{2 \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v} = \frac{d \,.\, \frac{1}{2} v}{\sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v} = \frac{d \,.\, \text{tang } \frac{1}{2} v}{\text{tang } \frac{1}{2} v};$$

par conséquent

$$\int \frac{dv}{\sin v} = \log. \text{ tang } \tfrac{1}{2} v + \text{const.}$$

Il en est de même pour l'intégrale de $\frac{dv}{\cos v}$, car on a à cause de

$$\frac{dv}{\cos v} = \frac{dv}{\sin (100^\circ - v)}$$

$$\int \frac{dv}{\cos v} = -\log. \text{tang} (50^\circ - \tfrac{1}{2} v) = \log. \text{tang} (50^\circ + \tfrac{1}{2} v) + \text{const.}$$

431. Si on veut avoir le logarithme de $1 + e \cos v$, on multipliera et on divisera cette quantité par 2, puis on substituera $y + \frac{1}{y}$ au lieu de $2 \cos v$, et on aura

$$1 + e \cos v = \frac{e}{2} \frac{y^2 + \frac{2}{e} y + 1}{y},$$

or

$$y^2 + \frac{2}{e} y + 1 = \{y + \lambda\} \cdot \left\{y + \frac{1}{\lambda}\right\};$$

par conséquent

$$1 + e\cos\nu = \frac{e}{2\lambda} \cdot \{1 + \lambda y^{-1}\}\{1 + \lambda y\},$$

prenant les logarithmes de part et d'autre, on aura

$$l(1 + e\cos\nu) = l \cdot \frac{e}{2\lambda} + l(1 + \lambda y) + l(1 + \lambda y^{-1}),$$

or

$$l(1 + \lambda y) = \lambda y - \frac{\lambda^2 y^2}{2} + \frac{\lambda^3 y^3}{3} - \frac{\lambda^4 y^4}{4} + \text{etc.}$$

et

$$l(1 + \lambda y^{-1}) = \lambda y^{-1} - \frac{\lambda^2 y^{-2}}{2} + \frac{\lambda^3 y^{-3}}{3} - \frac{\lambda^4 y^{-4}}{4} + \text{etc.}$$

Si donc on ajoute ces deux équations et qu'on observe que de l'équation $y + \frac{1}{y} = 2\cos\nu$, il résulte $y^2 + \frac{1}{y^2} = 2\cos 2\nu$, $y^3 + \frac{1}{y^3} = 2\cos 3\nu$, et ainsi de suite, on aura

$$l(1 + \lambda y) + l(1 + \lambda y^{-1}) =$$
$$2\left\{\lambda\cos\nu - \frac{\lambda^2}{2}\cos 2\nu + \frac{\lambda^3}{3}\cos 3\nu - \frac{\lambda^4}{4}\cos 4\nu + \text{etc.}\right\}$$

partant

$$l(1 + e\cos\nu) = l \cdot \frac{e}{2\lambda} +$$
$$2\left\{\lambda\cos\nu - \frac{\lambda^2}{2}\cdot\cos 2\nu + \frac{\lambda^3}{3}\cdot\cos 3\nu - \frac{\lambda^4}{4}\cos 4\nu + \text{etc.}\right\}$$

452. La méthode des coefficients indéterminés conduit à cette formule d'une manière fort simple, pour le faire voir représentons par $A+B\cos\nu+C\cos 2\nu+D\cos 3\nu+$ etc., le développement en série du logarithme de $1+e\cos\nu$; si on différentie par rapport à ν, on aura en divisant par $-d\nu$ l'équation suivante

$$\frac{e\sin\nu}{1+e\cos\nu}=B\sin\nu+2C\sin 2\nu+3D\sin 3\nu+\text{etc.}$$

Or par ce qui a été démontré ci-dessus, on a en faisant $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}=K$

$$\frac{1}{1+e\cos\nu}=K.\{1-2\lambda\cos\nu+2\lambda^2\cos 2\nu-2\lambda^3\cos 3\nu+\text{etc.}\}$$

Multipliant les deux membres de cette dernière équation par $e\sin\nu$, et substituant dans le second membre pour le double des produits des sinus de l'arc simple par les cosinus des arcs multiples, les sinus de la somme et de la différence des arcs, on aura

$$\frac{e\sin\nu}{1+e\cos\nu}=Ke.\left\{\begin{array}{l}1.\sin\nu-\lambda.\sin 2\nu+\lambda^2.\sin 3\nu-\text{etc.}\\-\lambda^2.\sin\nu+\lambda^3.\sin 2\nu-\lambda^4.\sin 3\nu+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

égalant la première expression de $\frac{e\sin\nu}{1+e\cos\nu}$ avec cette dernière, et comparant les coeffi-

ciens des termes affectés des sinus des mêmes multiples de l'arc v, on aura les équations suivantes.

$$\begin{aligned} B &= Ke.\{ 1 - \lambda^2 \} \\ 2C &= Ke.\{ \lambda - \lambda^3 \} = -B\lambda \\ 3D &= Ke.\{ \lambda^2 - \lambda^4 \} = +B\lambda^2 \\ 4E &= Ke.\{ \lambda^3 - \lambda^5 \} = -B\lambda^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

or

$$Ke.\{ 1 - \lambda^2 \} = \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2e} = \lambda,$$

ainsi

$$B = -2\lambda \; ; \quad C = \frac{2\lambda^2}{2} ;$$

$$D = -\frac{2\lambda^3}{3} ; \quad E = \frac{2\lambda^4}{4} ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

substituant pour B, C, D, E, etc. leurs valeurs, on aura

$$l(1 + e\cos v) =$$

$$A + 2\lambda\cos v - \frac{2\lambda^2}{2}\cos 2v + \frac{2\lambda^3}{3}\cos 3v - \text{etc.}$$

Si dans cette série on fait $v = 0$, tous les cosinus deviennent égaux à l'unité, et on a

$$l(1+e) = A + 2\left\{\lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \text{etc.}\right\};$$

donc

$$l(1+e) = A + 2\,l\{1+\lambda\},$$

d'où l'on tire

$$A = l(1+e) - l\,.\,\{1+\lambda\}^2 = l\,\frac{e}{2\lambda};$$

partant

$$l\,(1+e\cos v) = l\,.\,\frac{e}{2\lambda} +$$

$$2\lambda\cos v - \frac{2\lambda^2}{2}\cos 2v + \frac{2\lambda^3}{3}\cos 3v - \text{etc.}$$

formule qui est la même que celle que nous avons déjà trouvée plus haut par une autre méthode.

433. Si de l'équation $\frac{2}{e} = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ on tire la valeur de e, on la trouve égale à $\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$, si on la substitue dans le premier terme du développement du logarithme de $1+e\cos v$, il se changera en $-l(1+\lambda^2)$. Si donc à ce dernier logarithme, on substituait la série qui en tient lieu, celle qui exprime le logarithme de $1+e\cos v$ ne contiendrait plus que des termes

affectés de puissances entières et positives de λ, si donc on substitue $\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$ au lieu de e dans $l(1+e\cos\nu)$ et qu'on développe par rapport aux puissances de λ, on doit retomber sur la même formule, c'est effectivement ce qui a lieu, car si de l'égalité

$$1+e\cos\nu=1+\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\cos\phi$$

ou de la suivante

$$1+e\cos\nu=\frac{1+2\lambda\cos\phi+\lambda^2}{1+\lambda^2};$$

on prend les logarithmes, on aura

$$l(1+e\cos\nu)=-l(1+\lambda^2)+l(1+2\lambda\cos\nu+\lambda^2).$$

Or le logarithme de $1+x$ ne pouvant contenir que des termes affectés des puissances entières de x, celui de $1+2\lambda\cos\nu+\lambda^2$ ne pourra contenir que des termes affectés de puissances entières et positives de λ, ainsi on aura

$$l(1+2\lambda\cos\nu+\lambda^2)=A\lambda+B\lambda^2+C\lambda^3+\text{etc.}$$

Si on différentie les deux membres de cette

équation, par rapport à λ, on aura, après avoir divisé de part et d'autre par $d\lambda$, l'équation

$$\frac{2\cos\nu + 2\lambda}{1 + 2\lambda\cos\nu + \lambda^2} = A + 2B\lambda + 3C\lambda^2 + \text{etc.};$$

multipliant les deux membres de cette équation par le dénominateur du premier, et égalant à zéro les coefficiens des différentes puissances de λ après avoir transporté tous les termes dans un seul membre, on aura des équations qui serviront à déterminer les valeurs des coefficiens A, B, C, etc.; mais on y parviendra également sans avoir recours à ce moyen, car si on effectue la division, et qu'à chaque opération on fasse sur le reste les réductions qui se présentent, en substituant au produit du double du cosinus d'un arc multiple par celui de l'arc simple, les cosinus de la somme et de la différence des arcs, on trouvera que le double de la fraction

$$\frac{\cos\nu + \lambda}{1 + 2\lambda\cos\nu + \lambda^2},$$

est égal à

$$2\cos\nu - 2\lambda\cos 2\nu + 2\lambda^2\cos 3\nu - \ldots \pm 2\lambda^{n-1}\cos n\nu$$
$$\mp 2\lambda^n \cdot \frac{\cos(n+1)\nu + \lambda\cos n\nu}{1 + 2\lambda\cos\nu + \lambda^2},$$

c'est ce dont on se convaincra facilement en faisant voir que si l'un des termes du quotient est

$$\pm 2\lambda^{n-1}\cos n\nu,$$

et le reste

$$\mp 2\lambda^{n}\{\cos(n+1)\nu+\lambda\cos n\nu\},$$

le terme suivant du quotient sera

$$\pm 2\lambda^{n+1}\cos(n+1)\nu,$$

et le reste

$$\pm 2\lambda^{n+1}\{\cos(n+1)\nu+\lambda\cos(n+1)\nu\};$$

en effet si on divise

$$\mp 2\lambda^{n}\{\cos(n+1)\nu+\lambda\cos n\nu\}$$

par

$$1+2\lambda\cos\nu+\lambda^{2},$$

on a au quotient

$$\pm 2\lambda^{n}\cos(n+1)\nu,$$

et pour reste

$$\pm 2\lambda^{n+1}\{2\cos(n+1)\nu\cos\nu-\cos n\nu+\lambda\cos(n+1)\nu\},$$

ce qui se réduit à cause de

$$2\cos(n+1)\nu\cos\nu - \cos n\nu = \cos(n+2)\nu,$$

à

$$= 2\lambda^{n+1}\{\cos(n+2)\nu + \lambda\cos(n+1)\nu\};$$

et comme le premier terme du quotient et le premier reste sont de cette forme, il s'ensuit que tous les autres sont aussi de la même forme, et que la loi observée pour les termes du quotient a toujours lieu; si donc on compare les coefficiens des différentes puissances de λ dans cette série, avec celle des mêmes puissances de λ dans la première, on aura

$$A = 2\cos\nu;\quad B = 2\cos 2\nu;\quad 3C = 2\cos 3\nu; \text{ etc.};$$

tirant de ces équations les valeurs de A, B, C, etc., et les portant dans l'expression du logarithme de $1 + 2\lambda\cos\nu + \lambda^2$ et de là dans celle du logarithme de $1 + e\cos\nu$, on aura

$$l(1+e\cos\nu) = -l(1+\lambda^2) + 2\lambda\cos\nu - \frac{2\lambda^2}{2}\cos 2\nu + \frac{2\lambda^3}{3}\cos 3\nu - \text{etc.}$$

Cette méthode et la précédente sont fort simples, et dispensent d'avoir recours au Calcul intégral pour déterminer les premiers coeffi-

ciens comme l'a fait Euler dans son Calcul intégral.

434. La quantité que nous avons désignée par λ peut se mettre sous différentes formes, car si pour e dans l'équation

$$\lambda = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

on substitue φ, on aura

$$\lambda = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}},$$

Or si à l'équation

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1,$$

on ajoute la suivante,

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi,$$

on aura une équation qui donnera, en tirant la racine carrée de chaque membre

$$\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2} = \{1 + \sin\varphi\}^{\frac{1}{2}},$$

Si au lieu d'ajouter la seconde équation à la première on la retranchait de celle-ci, et qu'en-

suite on tire la racine carrée des deux membres de l'équation qui en résulte, on aura

$$\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2} = \{1 - \sin\varphi\}^{\frac{1}{2}}.$$

ajoutant et retranchant successivement cette dernière équation de la précédente, on aura

$$(*)\begin{cases} 2\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1+\sin\varphi} + \sqrt{1-\sin\varphi} \\ 2\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1+\sin\varphi} - \sqrt{1-\sin\varphi}, \end{cases}$$

si on divise la seconde équation par la première, on aura en observant que $\lambda = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$ et que $\sin\varphi = e$

$$\lambda = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}};$$

ce qu'il est facile de vérifier.

(*) Ces formules sont celles qui se trouvent dans la Trigonométrie de M. Legendre, à cela près qu'ici le rayon a été pris pour unité, au lieu que dans l'ouvrage cité, il est représenté par R ; mais si on opère dans celles que nous venons de donner, les changemens propres à rétablir l'homogénéité, elles coïncideront entièrement avec celles dont on vient de parler.

435. On aurait pu trouver le développement dont on a parlé dans le § 426, en multipliant par $\{1+\lambda^2\}$ le produit des séries qui résultent du développement des fractions $\frac{1}{1+\lambda y}$ et $\frac{1}{1+\frac{\lambda}{y}}$, et en substituant pour les sommes des puissances réciproques et semblables de y, leurs expressions en fonctions des cosinus des arcs multiples de l'angle ν, ou en ayant recours à la méthode des coefficiens indéterminés.

436. Si dans la fraction $\frac{1}{1+2\lambda\cos\nu+\lambda^2}$ on substitue $y+\frac{1}{y}$ au lieu de $2\cos\nu$, elle pourra être regardée comme résultant du produit de $\frac{1}{1+\lambda y}$ par $\frac{1}{1+\lambda.\frac{1}{y}}$; or la première de ces deux fractions développée en série, est égale à

$$1+\lambda y+\lambda^2y^2+\lambda^3y^3+\ldots+\lambda^ny^n+\ldots$$

Si on développe la seconde, on trouvera qu'elle est égale à

$$1+\lambda.\frac{1}{y}+\lambda^2.\frac{1}{y^2}+\lambda^3.\frac{1}{y^3}+\ldots+\lambda^n.\frac{1}{y^n}+\ldots$$

si on multiplie ces deux résultats, on trouvera que le coefficient de λ^n est égal à

$$y^n + y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + \frac{1}{y^{n-2}} + \frac{1}{y^{n-1}} + \frac{1}{y^n};$$

ou, ce qui revient au même, à $\frac{y^{n+1} - y^{-n-1}}{y - y^{-1}}$.

Mais des équations $y + \frac{1}{y} = 2 \cos \nu$ et $y^m + \frac{1}{y^m} = 2 \cos m\nu$, on en tire

$$\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = -4 \sin^2 \nu \text{ et } \left(y^m - \frac{1}{y^m}\right)^2 = -4 \sin^2 m\nu;$$

divisant la dernière équation par celle qui la précède, on en déduira

$$\frac{y^m - y^{-m}}{y - y^{-1}} = \frac{\sin m\nu}{\sin \nu},$$

ainsi

$$\frac{y^{n+1} - y^{-n-1}}{y - y^{-1}} = \frac{\sin (n+1)\nu}{\sin \nu}$$

par conséquent le terme général de la série qui résulte du développement de la fraction proposée est égal à

$$\frac{A^n \sin (n+1)\nu}{\sin \nu}.$$

Si on substitue successivement pour n les nombres 1, 2, 3, etc., on aura les termes successifs de la série, et on trouvera que

$$\frac{1}{1+2\lambda\cos\nu+\lambda^2} = 1+\lambda\frac{\sin 2\nu}{\sin\nu}+\lambda^2.\frac{\sin 3\nu}{\sin\nu}+\lambda^3.\frac{\sin 4\nu}{\sin\nu}+\text{etc.}$$

437. Si on désigne par c, un des côtés d'un triangle, par a et b les deux autres côtés et par C l'angle opposé au premier côté, on sait qu'on a entre les trois côtés et l'angle C la relation

$$c^2 = a^2 + 2ab\cos C + b^2,$$

de cette équation on tire

$$\frac{1}{c^2} = a^2\,\frac{1}{\left\{1+2\frac{b}{a}\cos C+\frac{b^2}{a^2}\right\}};$$

or si dans la formule de l'article précédent, on substitue $\frac{b}{a}$ au lieu de λ, on aura

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2}\left\{1+\frac{b}{a}.\frac{\sin 2C}{\sin C}+\frac{b^2}{a^2}.\frac{\sin 3C}{\sin C}+\text{etc.}\right\}$$

formule élégante et à laquelle on peut arriver par la méthode des coefficiens indéterminés.

Si dans cette formule on change a en b et

b en a, le premier membre reste toujours le même, et on a pour l'exprimer une nouvelle série qui est convergente, lorsque l'autre est divergente, et réciproquement; mais dans les applications en nombre il faut toujours se servir de celle où la fraction, par rapport aux puissances de laquelle on ordonne, est la plus petite.

438. Maintenant nous allons montrer l'usage qu'on peut faire de cette formule pour trouver l'accroissement complet de l'arc qui correspond à un accroissement donné de la tangente.

Désignons par x un arc, et par t la tangente de cet arc: si on représente par u l'arc dont la tangente est $t+i$, il est clair qu'il doit contenir l'arc x, puisque c'est à cela qu'il se réduit quand $i=0$, par conséquent l'arc dont la tangente est $t+i$ se compose de l'arc dont la tangente est t et d'une suite de termes qui disparaissent lorsqu'on fait $i=0$, ainsi on aura

$$u = x + Ai^{\alpha} + Bi^{\beta} + Ci^{\gamma} + Di^{\delta} \ldots +$$

Si on suppose maintenant à la tangente ex-

primée par $t+i$ un certain accroissement o, on aura un résultat qui ne différera du précédent que parce qu'il y aura partout $i+o$ au lieu de i dans le second membre; par conséquent si on développe les puissances de $i+o$, le coefficient de la première puissance de o dans le second membre, sera le même que celui de la même quantité dans le premier; or le coefficient de la première puissance de o dans le développement de l'arc dont la tangente est t étant $\frac{1}{1+t^2}$, celui qui est affecté de la même puissance de o dans le développement de l'arc dont la tangente est $t+i$ sera égal à $\frac{1}{1+(t+i)^2}$, et comme le coefficient de la première puissance de o s'obtient dans la série qui exprime l'arc dont la tangente est $t+i$, en multipliant chacun des termes par l'exposant de i dans chacun d'eux, et diminuant l'exposant d'une unité, il en résulte qu'on aura

$$\frac{1}{1+(t+i)^2} = \alpha A i^{\alpha-1} + \beta B i^{\beta-1} + \gamma C i^{\gamma-1} + \text{etc.}$$

or

$$\frac{1}{1+t^2+2it+i^2} = \frac{\cos^2 x}{1+2i\cos x \sin x + i^2\cos^2 x},$$

si

si donc on développe la fraction qui forme le second membre de cette équation, on aura un résultat qui sera identiquement le même que le second membre de l'équation qui la précède, mais on obtiendra le développement de

$$\frac{\cos^2 x}{1 + 2i\cos x \sin x + i^2 \cos^2 x},$$

en remplaçant λ dans le développement de

$$\frac{1}{1 + 2\lambda\cos\nu + \lambda^2},$$

par $i\cos x$, puis en multipliant le tout par $\cos^2 x$ et substituant $100^b - x$ au lieu de ν; si après les opérations et les substitutions effectuées on compare le résultat avec la série

$$\alpha A i^{\alpha-1} + \beta B i^{\beta-1} + \gamma C i^{\gamma-1} + \delta D i^{\delta-1} + \text{etc.}$$

on en déduira que les coefficiens α, β, γ, etc. forment la suite naturelle des nombres; la comparaison des coefficiens affectés des mêmes puissances de i donnera les équations suivantes

$$1.A = +\cos^1 x \cos x$$
$$2.B = -\cos^2 x \sin 2x$$
$$3.C = -\cos^3 x \cos 3x$$
$$4.D = +\cos^4 x \sin 4x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si de ces équations on tire les valeurs de A, B, C, D, etc. et qu'on les reporte dans l'équation

$$u = x + Ai^{\alpha} + Bi^{\beta} + Ci^{\gamma} + Di^{\delta} + \text{etc.}$$

après avoir mis pour α, β, γ, δ, etc. leurs valeurs, on aura

$$u = x + i\cos x.\cos x - \frac{i^2\cos^2 x}{2}\sin 2x - \frac{i^3\cos^3 x}{3}\cos 3x + \frac{i^4\cos^4 x}{4}\sin 4x + \frac{i^5\cos^5 x}{5}\cos 5x - \text{etc.}$$

439. Si dans cette formule on fait $i = -2\tan x$, on en déduira

$$2x = 2\sin x\cos x + \frac{(2\sin x)^2}{2}\sin 2x - \frac{(2\sin x)^3}{3}\cos 3x - \frac{(2\sin x)^4}{4}\sin 4x + \frac{(2\sin x)^5}{5}\cos 5x + \frac{(2\sin x)^6}{6}\sin 6x$$

.....

440. Le calcul différentiel conduit d'une manière fort simple à la formule qui donne la valeur de u, ainsi qu'on va le voir.

Représentons toujours par x l'arc dont la tangente est t, et par u celui dont la tan-

gente est $t+i$, on aura

$$u = x + Ai + Bi^2 + Ci^3 + Di^4 + \ldots\ldots$$

Si on substitue $i+o$ au lieu de x dans le développement de l'arc dont la tangente est $t+i$, on aura un résultat qui exprimera l'arc dont la tangente est $t+i+o$; mais comme le résultat doit être le même, en supposant que l'accroissement o soit attribué à t, au lieu de le supposer à i, il s'ensuit que le coefficient différentiel de l'arc dont la tangente est $t+i$ est le même, soit qu'on le prenne par rapport à i, ou bien par rapport à t. Or le coefficient différentiel pris par rapport à i est égal à

$$A + 2Bi + 3Ci^2 + 4Di^3 + 5Ei^4 + \text{etc.}$$

en le prenant par rapport à x, on trouve, à cause que A, B, C, etc. sont des fonctions de x, qu'il est égal à

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\,i + \frac{dB}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\,i^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{dC}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\,i^3 + \frac{dD}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\,i^4 + \frac{dE}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\,i^5 + \text{etc.}$$

Comparant ce résultat avec le précédent, et égalant les coefficiens des mêmes puissances

de i, on aura

$$A = \frac{dx}{dt}, \qquad 2B = \frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{dt},$$

$$3C = \frac{dB}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}, \qquad 4D = \frac{dC}{dx}\cdot\frac{dx}{dt},$$

.....

mais $x =$ arc tang t, ainsi on aura $A = \cos^2 x$, partant

$$\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} =$$

$$-2\cos^3 x \sin x = -\cos^2 x \sin 2x,$$

$$\frac{dB}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} =$$

$$-2\cos^2 x(\cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x) = -2\cos^3 x\cos 3x,$$

$$\frac{dC}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} =$$

$$2.3\cos^4 x(\sin 3x\cos x + \cos 3x\sin x) = 2.3\cos^4 x\sin 4x$$

$$\frac{dD}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} =$$

$$2.3.4(\cos 4x\cos x - \sin x 4x\sin x) = 2.3.4\cos^5 x\cos 5x\cos^5 x$$

et ainsi de suite ; par conséquent

$$A = \cos x\cos x, \qquad B = \frac{\cos^2 x}{2}\sin 2x,$$

$$C = -\frac{\cos^3 x}{3}\cos 3x, \quad D = \frac{\cos^4 x}{4}\sin 4x,$$

.....

Si on substitue pour A, B, C, D, etc., les valeurs que nous venons d'obtenir, on trouvera que l'arc dont la tangente est $t+i$ est égal à

$$x + i\cos x.\cos x - \frac{i^2\cos^2 x}{2}\sin 2x - \frac{i^3\cos^3 x}{3}\cos 3x$$

$$+\frac{i^4\cos^4 x}{4}\sin 4x + \frac{i^5\cos^5 x}{5}\cos 5x - \text{etc.}$$

comme on l'a déjà trouvé plus haut.

441. Si on veut déterminer une puissance quelconque de λ ordonnée par rapport aux puissances de e, on le pourra par divers moyens; l'un des plus simples est de faire usage du théorème de M. de *Lagrange;* ce théorème consiste en ce que si on a une équation de la forme

$$z = x + yfz$$

et qu'on veuille avoir une fonction quelconque de z qui soit ordonnée par rapport aux puissances de y, et qui ne renferme, dans son expression, que les variables x et y, ou des fonctions de ces quantités, on l'obtiendra sur-le-champ, au moyen de la formule suivante:

$$\varphi z = \varphi x + y\varphi' x fx + \frac{y^2}{2}(\varphi' x f^2 x)' + \frac{y^3}{2.3}(\varphi' x f^3 x)'' + \text{etc.}$$

442. Avant d'en faire l'application à l'objet que nous avons en vue, supposons qu'on ait $\varphi z = z^n$, et $fz = z^m$, on aura $\varphi x = x^n$ et $fx = x^m$; si on effectue sur ces fonctions les opérations indiquées sur φx et fx, dans la formule citée, on aura

$$z^n = x^n + nx^{m+n-1}y + \frac{n(2m+n-1)}{2}x^{2m+n-2}y^2$$
$$+ \frac{n(3m+n-1)(3m+n-2)}{2\,.\,3}x^{3m+n-3}y^3 + \text{etc.}$$

Cela posé, si on veut passer de cette formule à celle qui résulterait de l'application du théorème cité au cas où on aurait à déterminer la valeur de λ^m, il faudra de l'équation..... $\lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{e}$ en tirer $\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{e} - \lambda$, après quoi il n'y aura plus qu'à changer dans la formule ci-dessus n en $-m$, et à substituer $\frac{2}{e}$ au lieu de x, -1 au lieu de y, et à faire $m = -1$; et à changer z en $\frac{1}{\lambda}$; ces changemens et ces substitutions étant effectués, on aura

$$\lambda^m = \left(\frac{e}{2}\right)^m + m\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2} + \frac{m\,.\,m+3}{1\,.\,2}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+4}$$
$$+ \frac{m\,.\,m+4\,.\,m+5}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+6} + \text{etc.},$$

ou

$$\lambda^m = \frac{e^m}{2^m} \cdot \left\{ 1 + m\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{m \cdot m+3}{1 \cdot 2}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{m \cdot m+4 \cdot m+5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \text{etc.}, \right.$$

formule dont la loi est facile à saisir, et dont l'expression du terme général est

$$\frac{m \cdot m+n+1 \ldots\ldots m+2n-1}{1 \cdot \ldots\ldots\ldots n}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2n}$$

443. Si dans cette série on prend le rapport de deux termes consécutifs, on trouvera qu'elle est toujours convergente lorsque e est moindre que l'unité; mais si e était plus grand que 1, la série serait divergente et ne pourrait être employée à donner la valeur de la fonction dont elle est le développement, ce qui doit être, puisque dans cette hypothèse la fonction

$$\frac{e^m}{\left(1 + \sqrt{1 - e^2}\right)^m}$$

devient imaginaire et que l'imaginarité dont elle est affectée ne se manifeste dans aucuns des termes de la série : malgré le peu d'usage dont ces sortes de séries paraissent susceptibles, leur emploi néanmoins peut quelquefois se présenter : la fonction que nous venons de con-

sidérer en offre un exemple remarquable et bien propre à montrer l'utilité dont elles peuvent être dans l'analyse.

En effet si dans l'équation

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{e}$$

on substitue cos x au lieu de $\frac{1}{e}$, ce qui est toujours possible, puisque e est plus grand que l'unité, on aura

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = 2\cos x;$$

de cette équation on en déduit que

$$\lambda^m + \frac{1}{\lambda^m} = 2\cos mx,$$

quel que soit le nombre m. Or si dans le développement de λ^m on substitue $2\cos x$ au lieu de $\frac{2}{e}$, ou, ce qui revient au même, ... $(2\cos x)^{-1}$ au lieu de $\left(\frac{e}{2}\right)$, on aura

$$\lambda^m = (2\cos x)^{-m} + m(2\cos x)^{-m-2} + \frac{m.m+3}{1.2}(2\cos x)^{-m-4}$$

$$+ \frac{m.m+4.m+5}{1.2.3}(2\cos x)^{-m-6} + \text{etc.}$$

si on change m en $-m$ dans cette formule on aura

$$\frac{1}{\lambda^m} = (2\cos x)^m - m(2\cos x)^{m-2} + \frac{m.m-3}{1.2}(2\cos x)^{m-4}$$

$$- \frac{m.m-4.m-5}{1.2.3}(2\cos x)^{m-6} + \text{etc.}$$

mais on a, quel que soit m,

$$\lambda^m + \frac{1}{\lambda^m} = 2\cos mx;$$

ainsi on aura

$$2\cos mx =$$

$$\left\{(2\cos x)^m - m(2\cos x)^{m-2} + \frac{m.m-3}{1.2}(2\cos x)^{m-4} - \text{etc.}\right\}$$

$$+\left\{(2\cos x)^{-m} - m(2\cos x)^{-m-2} + \frac{m.m+3}{1.2}(2\cos x)^{-m-3} + \text{etc.}\right\}$$

444. Comme nous avons été conduit au développement du cosinus d'un arc multiple par la série qui donne le développement de la puissance m de la fonction

$$\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},$$

nous allons le reprendre de nouveau, afin que l'exposition en soit plus rapide et que cette exposition se trouve dégagée de tout ce qui lui est étranger.

Si on fait $2\cos\omega = \lambda + \frac{1}{\lambda}$, on aura pour toutes les valeurs de m, $\lambda^m + \frac{1}{\lambda^m} = 2\cos m\omega$.

Or de la première équation on tire

$$\lambda = 2\cos\omega - \lambda^{-1}.$$

Si on compare cette équation avec l'équation

$$z = x + yfz,$$

on aura

$$2\cos\omega = x,\ y = -1 \text{ et } fx = (2\cos\omega).$$

Or par le théorème cité plus haut, on a

$$\varphi z = \varphi x + y\varphi' x\, fx + \frac{y^2}{2}(\varphi' x f^2 x)' + \text{etc.}$$

Si donc on veut avoir λ^m, il faudra faire $\varphi x = (2\cos\omega)^m$ et par suite $\varphi' x = m(2\cos\omega)^{m-1}$

et comme on a

$$f x = (2\cos\omega)^{-1},$$

on aura

$$\begin{aligned}
\varphi' x f\ x &= m(2\cos\omega)^{m-2}\\
\varphi' x f^2 x &= m(2\cos\omega)^{m-3}\\
\varphi' x f^3 x &= m(2\cos\omega)^{m-4}\\
\varphi' x f^4 x &= m(2\cos\omega)^{m-5}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

par conséquent

$$(\varphi' x f^1 x)' = m.m-3\,(2\cos\omega)^{m-4}$$
$$(\varphi' x f^3 x)'' = m.m-4.m-5\,(2\cos\omega)^{m-6}$$
$$(\varphi' x f^4 x)''' = m.m-5.m-6.m-7\,(2\cos\omega)^{m-8}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si donc on substitue dans la formule de M. de Lagrange, pour φx et les coefficiens des différentes puissances de y, les valeurs que nous venons de trouver, et qu'on y fasse $y = -1$, on obtiendra l'équation

$$\lambda = (2\cos\omega)^m - m(2\cos\omega)^{m-2} + \frac{m.m-3}{2}(2\cos\omega)^{m-4} + \text{etc.}$$

Si dans cette formule on change m en $-m$ et qu'on ajoute le résultat au précédent, on aura, à cause de $\lambda^m + \frac{1}{\lambda^m} = 2\cos mx$

$$2\cos mx =$$
$$(2\cos\omega)^m - m(2\cos\omega)^{m-2} + \frac{m.m-3}{2}(2\cos\omega)^{m-4} - \text{etc.}$$
$$+ (2\cos\omega)^{-m} + m(2\cos\omega)^{-m-2} + \frac{m.m+3}{2}(2\cos\omega)^{-m-4} + \text{etc.}$$

445. Si dans la dernière formule on change m en $-m$ les deux séries se changent l'une dans l'autre et le résultat reste le même, ce

qu'on pourrait prévoir d'avance, puisqu'on a toujours $\cos - mx = \cos mx$.

446. Le théorème qui nous a conduit à la formule précédente, a de nombreuses applications et se trouve être un des plus importans de l'analyse; nous allons montrer l'usage qu'on en peut faire, pour en démontrer un autre que M. Lagrange a donné dans la Note XIII du Traité de la Résolution des Équations numériques : ce théorème consiste en ce que si on a deux séries semblables, telles que

$$\Psi x + \Psi' x\, fx + \left(\frac{\Psi' x\, f^2 x}{2}\right)' + \left(\frac{\Psi' x\, f^3 x}{2 \cdot 3}\right)'' + \text{etc.}$$

$$\Phi x + \Phi' x\, fx + \left(\frac{\Phi' x\, f^2 x}{2}\right)' + \left(\frac{\Phi' x\, f^3 x}{2 \cdot 3}\right)'' + \text{etc.}$$

qui s'étendent à l'infini, on aura, en les multipliant ou en les divisant l'une par l'autre, une série semblable qui se composera avec le produit ou le quotient des fonctions Ψx et Φx, de la même manière que la première se compose avec la fonction Ψx.

En effet la première des deux séries peut être considérée comme exprimant le développement de Ψz en fonction de x, en supposant

que les quantités x et z sont liées entr'elles par l'équation $z=x+yfz$, puisque c'est effectivement celle qu'on obtiendrait si on avait à évaluer la fonction Ψz d'après cette équation, et qu'après le développement on fît $y=1$; il en est de même de la seconde série. Si donc on multiplie les deux séries, on en obtiendra une qui sera ce que devient le produit de $\Psi z \Phi z$, lorsque pour z on y substituera la valeur en fonction de x et de y. D'un autre côté, si on représente ce produit par Πz, on aura

$$\Pi z = \Pi x + y\,\Pi' x\, fx + \frac{y^2}{2}(\Pi' x\, f^2 x)' + \frac{y^3}{2\cdot 3}(\Pi' x\, f^3 x)'' + \text{etc.}$$

et puisqu'on a $\Psi z \Phi z = \Pi z$, on aura

$$(\downarrow x\ \Phi x) = \Pi x$$
$$(\downarrow x\ \Phi x)' = \Pi' x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

par conséquent,

$$\downarrow z \Phi z = (\downarrow x \Phi x) + y\,(\downarrow x \Phi x)'\, fx + \frac{y^2}{2}[(\downarrow x \Phi x)']\, f^2 x)'' + \frac{y^3}{2\cdot 3}(\downarrow x\ \Phi x)'\ f^3 x]'' + \text{etc.}$$

447. Si au lieu de multiplier les deux séries

entr'elles, on les divisait l'une par l'autre, on aurait en faisant $\frac{\downarrow z}{\Phi z} = \Pi z$,

$$\frac{\downarrow x}{\Phi x} = \Pi x, \left(\frac{\downarrow x}{\Phi x}\right)' = \Pi' x,$$

substituant dans la série

$$\Pi z = \Pi x + y\Pi' x\, fx + \frac{y^2}{2}(\Pi' x f^2 x)' + \text{etc.}$$

pour Πz, Πx et $\Pi' x$ leurs valeurs, on aura

$$\frac{\downarrow z}{\Phi z} = \frac{\downarrow x}{\Phi x} + y\left(\frac{\downarrow x}{\Phi x}\right)' fx + \frac{y^2}{2}\left\{\left(\frac{\downarrow x}{\Phi x}\right)' fx\right\} + \frac{y^3}{2 \cdot 3}\left\{\left(\frac{\downarrow x}{\Phi x}\right)' f^2 x\right\}'' + \text{etc.}$$

448. L'auteur des Fonctions analytiques, pour établir le premier théorème, considère les deux séries semblables

$$\downarrow x + \downarrow' x\, fx + \left(\frac{\downarrow' x\, f^2 x}{2}\right)' + \left(\frac{\downarrow' x f^3 x}{2 \cdot 3}\right)'' + \text{etc.}$$

$$\Phi x + \Phi' x\, fx + \left(\frac{\Phi' x\, f^2 x}{2}\right)' + \left(\frac{\Phi' x f^3 x}{2 \cdot 3}\right)'' + \text{etc.}$$

et les multiplie l'une par l'autre; puis il remarque que le premier terme du produit, ainsi que ceux qui renferment les deux premières puissances

de fx, résultent de la substitution du produit des premiers termes de ces séries dans l'une d'elles, au lieu de la fonction du premier terme de cette série. Mais comme ce procédé entraîne dans des calculs qui deviennent de plus en plus compliqués, et que ces calculs n'offrent aucun moyen de faire apercevoir la loi des réductions, on ne peut, sans s'écarter de la rigueur, étendre aux autres termes la loi qu'on a reconnue pour les trois premiers, à moins qu'on n'ait un moyen de la mettre en évidence ou de démontrer le théorème directement; c'est ce que nous avons fait par les considérations que nous avons rapportées plus haut. Quant au second théorème, il le regarde comme une conséquence du premier; mais l'un et l'autre ne sont que des cas particuliers d'un théorème beaucoup plus général, et qui consiste en ce qu'une fonction quelconque de séries semblables à celles que nous avons considérées est encore une série semblable qui se compose avec une fonction semblable du premier terme de chacune d'elles, de la même manière que l'une d'entr'elles se compose avec son premier terme.

DE LA CYCLOÏDE.

449. La Cycloïde ordinaire est une courbe plane décrite par un point pris sur une circonférence de cercle, qui roule sur une droite donnée de position.

On peut encore la considérer comme étant engendrée par le mouvement d'un point qui se meut sur une circonférence de cercle, tandis que tous les points de cette même circonférence sont entraînés d'un mouvement commun parallèlement à une droite donnée de position et d'un mouvement égal à celui du point mobile autour du centre du cercle.

PROBLÈME PREMIER.

On propose de mener par un des points d'une Cycloïde une tangente à cette courbe.

450. Soit ABC une cycloïde (*fig.* 12), M un de ses points, EMD une des positions du cercle générateur, on aura, d'après la manière dont cette courbe est engendrée, DC = arc DM. Si par un point N pris sur ce cercle, on mène une

une droite GF parallèle à CA et égale à GM, le point F appartiendra à la courbe, puisque le mouvement de translation du point mobile dans le sens de la droite CA est égal au mouvement circulaire de ce même point autour du centre du cercle ; par conséquent si on veut avoir le point de la cycloïde ABC qui correspond au point G du cercle, on mènera par ce point la droite GF parallèle à CA et égale à l'arc GM, et le point F sera à la courbe; pour avoir les points de la cycloïde qui correspondent aux points de l'arc MD, il faudra mener par chacun d'eux une droite *gf*, parallèle à AC, et prendre sur elle une partie *gf* égale à *g*M et le point *f* sera encore à la courbe.

Cela posé, si dans un cercle ABC, *fig.* 13, on mène une corde AD, que par un point B de l'arc soutendu par cette corde on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre AC qui passe par une de ses extrémités, la partie BE comprise entre l'arc et la corde est moindre que l'arc BD, car si on mène la corde BD, on aura un triangle BED dans lequel l'angle BDE a pour mesure la moitié de AB et l'angle BED la moitié de AK plus la moitié de BD, c'est-à-dire la moitié de BK, par conséquent l'angle

BED étant plus grand que l'angle BDE, on aura BD > BE, et comme la corde BD est moindre que l'arc BD, il en résulte à plus forte raison que l'arc BD est plus grand que la droite BE. Si le point d'où on abaisse la perpendiculaire se trouvait sur le prolongement de l'arc AD, en G par exemple, la partie GF serait plus grande que l'arc DG, car si par le point D on mène une tangente DH au cercle, l'angle FDH aura pour mesure la moitié de l'arc ABD, et l'angle DFH la moitié de AI moins la moitié de DG, c'est-à-dire la moitié de AD, puisque l'arc AI est égal à l'arc AG; ainsi les deux angles DFH et FDH étant égaux, on aura FH = DH, mais DH + HG est plus grand que l'arc DG, donc FG qui est égal à DH + HG est aussi plus grand que l'arc DG. Si donc on mène par l'extrémité E du diamètre ED, *fig.* 12, et par le point M la droite EM*i*, elle sera tangente, puisqu'on aura toujours pour tous les points de l'arc ME, GI < GF, et par conséquent GI < GF, on aura de même pour tous les points de l'arc MD, *gi* > *g*M et par suite *gi* > *gf*.

Quadrature de la Cycloïde.

541. Par le point le plus élevé de la cycloïde menons une parallèle à sa base, qui soit terminée par les perpendiculaires élevées aux extrémités de cette base, on aura un rectangle ACML (*fig.* 14) dont la base sera égale à la circonférence du cercle générateur, et dont la hauteur sera égale au diamètre de ce même cercle; par conséquent l'aire de ce rectangle sera quadruple de celle du cercle générateur. Cela posé, si par deux points G et H, pris sur la cycloïde, on mène des tangentes à cette courbe, que par les mêmes points on mène des parallèles à la base, jusqu'à la rencontre du cercle DEBND, et que l'on tire les cordes DE, DF, elles seront respectivement égales et parallèles à GK et HI; par conséquent si les points G et H sont infiniment près, le triangle élémentaire IHK est égal au secteur élémentaire EDF; ainsi la somme de tous les triangles élémentaires qui composent l'aire du triangle mixtiligne ALD, sera égale à celle de tous les petits secteurs élémentaires qui composent le demi-cercle DEB, le triangle mixtiligne DCM étant égal au demi-cercle DNB; il en résulte

que les deux triangles mixtilignes ALD, CMD équivalent au cercle DEBND; si on les retranche du rectangle ACML, qui est quadruple du cercle DEBND, il restera pour l'aire de la cycloïde le triple de l'aire du cercle générateur.

THÉORÈME.

Toutes les normales à une même branche de cycloïde sont des tangentes à une autre branche de cycloïde égale à la première, mais située en sens inverse.

542. Soit AMB une cycloïde (*fig* 15), si par un point M de cette cycloïde on conduit une normale à cette courbe, elle sera égale et parallèle à la corde correspondante MG du cercle générateur. Si par le point N où elle rencontre la base AB, on élève une perpendiculaire terminée à la tangente menée par le point M de la cycloïde, elle sera égale au diamètre du cercle générateur; si sur cette ligne, comme diamètre, on décrit un cercle, ce cercle sera une des positions du cercle générateur, et on aura AN = arc MN et CN = arc ML. Si on prolonge le diamètre LN au-dessus de la base d'une quantité NF égale à NL, et que sur cette

ligne comme diamètre, on décrive un cercle, il sera coupé par le prolongement de la normale en un point H, de sorte que l'arc FH sera égal à l'arc ML, et par suite égal à CN. Si donc on mène par le point F une parallèle EFG à la base AB de la cyloïde, le point H appartiendra à une cycloïde dont l'origine sera au point E et dont le cercle générateur sera FHNT puisque l'arc FH = NE et comme NH est perpendiculaire à FH, elle sera tangente à la cycloïde AHE, qui a pour origine le point E et pour cercle générateur le cercle NHFT; de plus, comme ce cercle est égal au cercle LMNI, la demi-cycloïde AHE est égale à la demi-cycloïde AMD. On démontrerait de la même manière que les normales à la branche DKB sont tangentes à la demi-cycloïde ESB.

543. On voit par ce qui vient d'être dit que la portion de la normale comprise entre les deux courbes, est double de la corde correspondante du cercle générateur; on voit de plus que si par deux points d'une cycloïde, on lui mène deux normales, ces deux normales se couperont en un point qui sera d'autant plus près de la courbe que touchent ces normales, qu'elles seront menées par des points plus rap-

prochés, de sorte que quand cette distance sera infiniment petite, le point d'intersection se trouvera sur la courbe elle-même, par conséquent les branches de cycloïdes auxquelles les normales sont tangentes, sont les lieux des intersections continuelles des normales à la courbe.

THÉORÈME.

Un arc de cycloïde dont les extrémités sont situées d'un même côté du milieu de la courbe, est égal au double de la différence des deux cordes correspondantes du cercle générateur.

544. Soit ADB une cycloïde, (*fig.* 15) BSE celle que touchent les normales à la première courbe ; si OS et VU sont deux normales très-rapprochées, on aura, à un infiniment petit près du second, ordre UK=UV, puisque ces normales font des angles égaux avec la corde KV ; par conséquent on aura $SK = SU + Uw + wV$, et par suite, $SK - wV = SU + Uw$; et comme la somme des deux lignes qui composent le second membre de cette égalité, ne diffère du petit arc élémentaire sw que d'une quantité infiniment petite du second ordre, par rapport à ce même arc, la somme d'un nombre quel-

conque d'arcs élémentaires ne différera du polygone circonscrit correspondant que d'une quantité infiniment petite qui sera au moins du second ordre; si donc on désigne les normales successives comprises entre les deux courbes, à partir d'une des extrémités de l'arc proposé et finissant par l'autre par r', r'', r''', etc., $r^{(n)}$, et que l'on représente les arcs élémentaires correspondans par a', a'', a''', etc. a^{n-1}, on aura

$$\begin{aligned} r' - r'' &= a' \\ r'' - r''' &= a'' \\ r''' - r^{IV} &= a''' \\ r^{IV} - r^{V} &= a^{IV} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r^{n-1} - r^{n} &= a^{(n-1)}; \end{aligned}$$

si on ajoute toutes ces égalités, on aura l'équation suivante :

$$r' - r^{(n)} = a' + a'' + a''' + \ldots\ldots + a^{(n-1)},$$

qui sera rigoureusement exacte, car quand bien même les équations qui ont produit celles-ci ne seraient vraies qu'à des quantités infiniment petites du premier ordre, le premier membre de la dernière équation ne renfermant aucune quantité infiniment petite, il faut qu'elles dispa-

raissent aussi du second membre ; mais on a

$$r' = 2Bt, \quad r^{(n)} = 2Bx,$$

ainsi

$$r' - r^{(n)} = 2\{Bt - Bx\};$$

par conséquent

$$a' + a'' + a''' + \ldots + a^{(n-1)} = 2\{Bt - B'x\};$$

c'est-à-dire qu'un arc quelconque de cycloïde est égal au double de la différence des cordes correspondantes du cercle générateur, ces cordes ayant pour origine commune le point du cercle générateur qui est le plus élevé au-dessus de la base.

545. De ce théorème il résulte que si on conçoit un fil SK tendu suivant la direction de la tangente à la courbe, de sorte que l'une des extrémités soit sur la cycloïde AMB, il est clair que si on applique ce fil sur la cycloïde EB, l'extrémité K du fil, dans cette nouvelle position, appartiendra encore à la première cycloïde ; par conséquent cette dernière peut être considérée comme produite par le développement d'un fil qui serait exactement appliqué sur l'autre, c'est pourquoi on a donné à cette dernière le nom de *développée*, et à la première le nom de *développante*.

THÉORÈME.

Dans la cycloïde, le carré d'un arc compté du milieu de cette cycloïde, est égal au quadruple du rectangle du diamètre, par la projection de cet arc sur une droite perpendiculaire à l'axe.

546. Soit AIE (*fig.* 16) une demi-cycloïde, AMB sa développante, si par un point I pris sur la cycloïde, on lui mène une tangente IM, elle sera divisée au point F en deux également, et l'arc AI sera égal à IM ou à 2IF; mais si par le point I on mène la droite IH parallèle à la base DE, et que l'on joigne le point A et le point G, où elle coupe le cercle AGD décrit sur l'axe CD comme diamètre, la ligne IF sera égale et parallèle à la corde AG; or, dans un cercle, le carré d'une corde est égal au rectangle fait sur le diamètre qui passe par une des extrémités et le segment correspondant; ainsi $\overline{AG}^2 = AD \cdot AH$; par conséquent.... $4\overline{IF}^2 = 4AD \cdot AH$; or on a $4\overline{IF}^2 = \overline{IM}^2 =$ le carré de l'arc AI; si donc on désigne cet arc par s, le diamètre AD par a et le segment AH par z, on aura entre un arc de cycloïde, le dia-

mètre du cercle générateur et sa projection sur l'axe, la relation $s^2 = 4az$, les s et les z étant comptées de l'extrémité de cet axe.

547. La courbe que nous venons de considérer a un grand nombre de propriétés fort remarquables; une des plus saillantes est celle qu'elle a d'être à la fois *isochrone* et *brachistochrone*, c'est-à-dire d'être la courbe suivant laquelle un corps pesant doit descendre pour arriver au point le plus bas de cette courbe, dans le même temps, quelle que soit d'ailleurs l'amplitude de l'arc, et d'être la courbe que doit suivre un corps grave, pour arriver dans le moindre temps possible d'un point à un autre, c'est ce qu'on verra par ce qui suit.

THÉORÈME.

Un corps grave abandonné à l'action de la pesanteur, et qui se meut le long d'une cycloïde renversée, dont la base est horizontale, arrive au point le plus bas dans le même temps, quelle que soit d'ailleurs l'étendue de l'arc parcouru.

548. Supposons deux points pesans, placés à l'origine du mouvement en deux points M et m de la cycloïde (*fig.* 17); si par ces deux points on mène des droites horizontales MP et mp jus-

qu'à la rencontre du cercle générateur, et que l'on mène les cordes DP, Dp, elles seront parallèles aux tangentes, à la courbe, aux points M et m, et par conséquent aux directions des espaces parcourus par chacun d'eux dans le premier instant. Si on représente la force de la gravité ou l'impulsion communiquée à chacun des points matériels, dans le sens vertical, par le diamètre CD, la force tangentielle dont les deux points M et m sont animés, seront représentées respectivement par DP et Dp, et par conséquent seront proportionnelles aux arcs DM et Dm; ainsi les espaces parcourus sur la courbe, dans le premier instant, seront proportionnels aux arcs à parcourir, de sorte que les arcs restans seront entre eux dans le même rapport; si à la fin de cet instant on conçoit que la pesanteur donne une nouvelle impulsion, les points matériels seront sollicités par des forces verticales qui seront encore égales; si on les décompose dans le sens des élémens de la courbe où ils se trouvent placés, on trouvera que les forces tangentielles, au commencement du second instant, sont proportionnelles aux longueurs des arcs à parcourir, de sorte que les espaces élémentaires parcourus dans ce second instant, seront proportionnels

mêmes arcs; si à la fin de ce second instant, la pesanteur imprime une nouvelle impulsion à chacun des points matériels, et que l'on continue à raisonner de la même manière qu'on a déjà fait, on trouvera que les corps, dans chacun des instans de leurs courses, sont animés par des forces proportionnelles aux arcs qui restent à parcourir, de manière qu'ils arriveront à la fois au point le plus bas.

PROBLÈME.

Trouver la courbe suivant laquelle un corps pesant doit descendre pour arriver d'un point à un autre dans le moindre temps possible.

549. Si la ligne AMB, (*fig.* 18) est la ligne suivant laquelle un corps doit descendre, lorsqu'il est abandonné à l'action de la pesanteur, pour arriver du point A au point B dans le temps le plus court, toute autre ligne ACB, quelle que peu différente qu'elle soit de AMB sera parcourue dans un intervalle de temps plus long; or, si on prend sur la première courbe deux points M et *m* placés à une distance infiniment petite l'une de l'autre, et que par ces deux

points on mène deux normales à la première courbe, elles se rencontreront en un point D. Si de ce point comme centre avec un rayon égal à DC, on décrit un petit arc de cercle C*e*, cet arc de cercle se confondra sensiblement avec l'élément de courbe C*c*, et le temps employé à parcourir ce petit arc de cercle sera le même que celui qui sera employé à parcourir le petit élément C*c*. Or les forces qui sollicitent deux points matériels qui n'ont reçu aucune vîtesse initiale et qui proviennent de l'action d'une force accélératrice constante, sont entre elles comme les racines carrées des hauteurs verticales qui ont été parcourues par ces mêmes points ; par conséquent si on tire l'horizontale AK, la force verticale qui anime le point matériel lorsqu'il est arrivé en M, est à celle dont il serait animé au point C, s'il avait parcouru la ligne AC, comme $\sqrt{ME}$ est à $\sqrt{CF}$; et comme les forces en M et en C, estimées dans le sens des petites droites M*m* et C*c*, sont entre elles dans le rapport des forces verticales appliquées en M et C, puisqu'elles sont parallèles, il en résulte que si on désigne les forces en M et en C estimées dans le sens des petits arcs par φ et φ', on aura $\varphi : \varphi' :: \sqrt{ME} : \sqrt{CF}$; mais les mêmes forces en M et en C, estimées dans le sens des petits

arcs, sont entre elles comme les vîtesses qu'elles communiquent dans le sens de ces mêmes arcs; si donc on désigne par t le temps employé à parcourir le petit arc Mm, et par t' celui qui est employé à parcourir le petit arc Ce, on aura

$$\varphi : \varphi' :: \frac{Mm}{t} : \frac{Cc}{t'},$$

par conséquent

$$t : t' :: \frac{Mm}{\sqrt{ME}} : \frac{Ce}{\sqrt{CF}}$$

mais si on joint le point D et le point E par la droite DH, et que par le point F on mène FG parallèle à ED, on aura

$$Mm : Ce :: MD : CD :: ME : CH,$$

ainsi on aura

$$t : t' :: \sqrt{ME} : \frac{CH}{\sqrt{CF}} :: \sqrt{CF} : \frac{CH}{\sqrt{ME}},$$

ou bien

$$t^2 : t'^2 :: CF : \frac{\overline{CH}^2}{ME},$$

par conséquent le temps employé à parcourir l'arc Mm sera moindre que le temps employé à parcourir Ce ou Cc, si on a toujours $CF < \frac{\overline{CH}^2}{ME}$ ou

$\frac{CF}{CH} < \frac{CH}{ME}$, ou bien $\frac{CG}{CD} < \frac{CD}{MD}$, ou, ce qui revient au même, $CD^2 > CG \times MD$, car le temps employé à parcourir un élément quelconque de AMB étant moindre que le temps employé à parcourir l'élément correspondant de la courbe ACB, il en résulte que le temps employé à parcourir AMB est moindre que celui qui est employé à parcourir la courbe ACB; pour voir comment on peut toujours satisfaire à l'inégalité $\overline{CD}^2 > CG \times MD$, représentons MI par r, ID par $r+i$, CM par ω, on aura

$$MI : CM :: EI : FE :: DI : GD,$$

ou bien à cause de la liaison du premier rapport au dernier

$$r : \omega :: r+i : DG = \omega + \frac{i\omega}{r},$$

par conséquent il suffira de faire ensorte qu'on ait, quelque petit d'ailleurs que soit ω, l'inégalité suivante

$$\{2r+i+\omega\}^2 > \left\{2r+i+2\omega+\frac{i\omega}{r}\right\}\{2r+i\},$$

ou bien $\omega > 2i + \frac{i^2}{r}$,

et comme cette inégalité ne peut être satisfaite

quelque petite que soit ω, à moins qu'on n'ait $i = 0$, il en résulte qu'on doit toujours avoir ID = IM, c'est-à-dire le rayon du cercle osculateur double de la normale, quel que soit d'ailleurs le point de la courbe brachistochrone qu'on considère, et comme cette propriété n'appartient qu'à la cycloïde, il en résulte que la courbe cherchée est un arc de cycloïde.

55o. Pour construire la cycloïde à laquelle l'arc AMB appartient, nous observerons qu'une normale quelconque a une cycloïde faisant toujours avec la base un angle égal au demi-angle au centre de l'arc développé, il en résulte que si plusieurs cycloïdes ont une origine commune, les normales qui correspondent à des arcs semblables développés sont toutes parallèles entre elles, et comme ces normales sont proportionnelles aux longueurs des arcs développés, il en résulte que les points des cycloïdes qui correspondent à ces normales, sont situés sur une même droite; d'ailleurs ces normales étant des cordes d'arcs semblables dans des cercles différens, elles sont entre elles dans le rapport des diamètres des cercles générateurs; ainsi les cordes des différentes cycloïdes qui ont une même origine, et dont les bases sont sur une même droite, sont entre

entre elles, lorsqu'elles partent de l'origine commune des cycloïdes dans le rapport des diamètres des cercles générateurs; par conséquent pour construire une cycloïde dont l'origine soit en un point donné et dont la base soit donnée de direction et qui de plus passe par un point donné, on décrira une cycloïde quelconque qui ait même origine que celle qu'on cherche, et dont la base se trouve sur la même droite, ensuite on mènera par l'origine et le point donné une droite qui déterminera dans la dernière cycloïde une corde qui sera à sa correspondante dans l'autre, comme le diamètre du cercle générateur de la cycloïde construite est à celui dont il s'agit; dans cette proportion les trois premiers termes sont connus, ainsi il sera facile d'en déduire le quatrième, après quoi il sera facile de construire la cycloïde proposée, puisqu'on aura la direction de sa base, le diamètre du cercle générateur et son origine.

551. Si on veut construire la cycloïde cherchée par points, on le pourra aisément à l'aide d'un autre cycloïde, car les cordes correspondantes étant entre elles dans le rapport des diamètres des cercles générateurs, on aura (*fig.* 19),

$$AB : Ab :: AC : Ac,$$

par conséquent la droite BC est parallèle à BC. Si donc par le point A et le point donné *b* on mène la corde A*b* et qu'on tire par le point A une droite quelconque AC, que l'on joigne le point où elle coupe la cycloïde ABCD par une droite BC et qu'ensuite par le point *b* on mène une parallèle à BC, elle coupera la ligne AC en un point C qui appartiendra à la cycloïde, on déterminera autant de ces points qu'on jugera convenable pour pouvoir tracer la courbe.

552. Nous avons supposé dans ce qui a été dit § 549, que la courbe tautochrone était située dans un plan vertical, c'est ce qu'il est facile de démontrer; car quelle que soit cette courbe, si par chacun de ses points on abaisse des perpendiculaires sur le plan vertical qui passe par les deux points donnés, il faudra que la courbe décrite soit telle, que le mobile en passant d'une génératrice à l'autre puisse y arriver dans le temps le plus court, ce qui exige que les élémens de la courbe soient tous perpendiculaires à ces génératrices, et par conséquent que la courbe se trouve dans le plan vertical mené par les deux points donnés.

THÉORÈME.

Si dans un cercle on fait rouler un autre cercle d'un diamètre moitié moindre, un point quelconque pris dans le plan de ce dernier cercle, décrit, dans son mouvement, une ellipse dont les demi-axes sont égaux, l'un à la plus grande et l'autre à la plus petite distance de ce point à la circonférence de ce cercle.

553. Considérons le cercle arrivé dans une position telle que le point d'attouchement des deux cercles soit dans la direction du point donné et du centre du cercle auquel ce point est lié invariablement (*fig.* 20); cela posé, supposons que le cercle CDI tourne dans l'intérieur du cercle ADB, de sorte que des arcs du premier cercle s'appliquent sur des arcs de longueur égale du second; il est clair que si dans une nouvelle position CIG de ce cercle, on prend à partir du point G, un arc GH égal en longueur à l'arc GD, le point H sera la nouvelle position du point D sur ce cercle, et il se trouvera sur le diamètre primitif CD, car la longueur de l'arc GD correspondant

dans le cercle CHG à un angle au centre deux fois plus grand, il en résulte, à cause que le cercle CDI, dans toutes ses positions, passe par le centre C de l'autre cercle que l'angle GCH qui a pour mesure la moitié de GH, est égal à un angle au centre qui, dans un cercle dont le rayon est double, intercepterait entre ses côtés un arc de même longueur ; par conséquent la ligne CH est dans la direction de la ligne CD, de sorte que le point D dans sa nouvelle position est toujours sur le diamètre DD', ainsi ce point décrit dans le mouvement du cercle le diamètre DD' ; si par ce point H et le point I, centre du cercle CHG, on mène la ligne HIK, elle coïncidera avec le diamètre CD, lorsque le cercle CDI sera parvenu dans la position CHG ; ainsi en supposant que le point P est celui dont on cherche à déterminer la trace, il se trouvera à une distance IK du centre, égale à γP ; si par le point K on abaisse une perpendiculaire KO sur CB, et qu'on la prolonge, elle rencontrera le diamètre CG en un point M éloigné du point I d'une quantité $IM = IK$, puisque le triangle KIM est semblable au triangle CIH qui a deux côtés égaux ; ainsi on aura, à cause de $IK = \gamma P$, $MG = CP$ et $CM = CH$; ainsi le point M se trouve sur une circonférence de

cercle décrite du point C, comme centre avec un rayon égal à DP; mais, si par ce point on mène KN parallèle à CF, on aura IL = IK, puisque le triangle KIL est semblable au triangle HIG, et par suite CL = CP; par conséquent le point L est sur une circonférence de cercle décrite du point C comme centre, avec un rayon égal à CP, d'où il suit que le point K est à une ellipse dont le demi-grand axe est DP et le demi-petit axe est CP; car on a.... MO : KO :: MC : LC :: DP : PC, ce qu'il fallait démontrer.

554. Si on suppose que le point P soit en D, le grand axe de l'ellipse sera égal au diamètre DD′ et le petit axe sera nul; par conséquent le point D décrira le diamètre DD′. Si le point P était sur le point C, le petit axe de l'ellipse serait nul, et le grand axe serait égal à AB; ainsi le point C, dans le mouvement du cercle, se trouve toujours sur le diamètre AB; de sorte que les points D et C, dans le mouvement du cercle CDI, ne sortent point de dessus les diamètres auxquels ils appartiennent.

Enfin si le point P était le milieu de CD, l'ellipse décrite aurait ses deux axes égaux, et par

conséquent serait un cercle, ce qui, dans ce cas est tout à fait évident.

THÉORÈME.

Dans la Logarithmique la soutangente est constante.

555. Soit x et y les coordonnées d'un point M de la courbe (*fig.* 21), x' et y' les coordonnées d'un autre point M'; si par ces deux points on mène une droite indéfinie, elle coupera l'axe des abscisses en un point; si par les mêmes points M et M', on abaisse des perpendiculaires sur cet axe, et que par le point M on mène une parallèle à cet axe, et qui soit terminée à l'ordonnée M'P', on aura deux triangles MPS et M'QM qui seront semblables et qui donneront en représentant PS par s, l'équation $\frac{s}{y} = \frac{x' - x}{y' - y}$; mais par la nature de la courbe, on a $y = a^x$; ainsi on aura

$$s = \frac{a^x (x' - x)}{a^{x'} - a^x} = \frac{x' - x}{a^{x'-x} - 1}.$$

Cette équation nous fait voir que la sousécante est la même, lorsque la différence des abscisses est la même quelque part d'ailleurs que soient

pris les deux points sur la courbe, et quelque petit que soit l'intervalle qui se trouve entre ces deux points; d'où il résulte que quand cet intervalle sera nul, cela aura encore lieu; et comme dans ce cas la sécante devient tangente, il s'ensuit que dans la logarithmique, la soutangente est constante: c'est d'ailleurs ce qu'il est facile d'établir en toute rigueur; car, s'il pouvait exister une différence entre deux quelconques d'entre elles, entre celles du point M et celle du point *m* par exemple (*fig.* 22), prenons sur la plus grande *pt* une partie *pk* égale à la plus petite PT; si on joint le point K et le point *m* par une droite, il est facile de voir que cette droite sera une sécante, et qu'elle coupera la courbe en un second point *n*; si de ce point on abaisse l'ordonnée *no* et que l'on porte *po* de P en O, et qu'ensuite on élève l'ordonnée *o*N, on aura, en tirant la ligne NM une sécante dont la sousécante P*w* sera égale à *pk*; mais cette dernière ligne est égale à PT, ainsi on aurait P*w* = PT, où la partie égale au tout, ce qui est absurde; donc il ne peut y avoir dans la logarithmique d'inégalité entre les soutangentes, par conséquent elles sont toutes égales entre elles.

THÉORÈME.

Dans la logarithmique, l'espace total compris entre une ordonnée et l'asymptote, est égal au rectangle fait sur cette ordonnée et la soutangente.

556. Soit M et m deux points de cette courbe, que nous supposerons infiniment près l'un de l'autre (*fig.* 23); si par l'un et par l'autre de ces points on mène des tangentes à la courbe, et des ordonnées à l'axe PX qui en est l'asymptote, on aura en vertu des propriétés de cette courbe, PT = pt; cela posé, les points M et m étant infiniment près, le petit arc Mm se confond avec la tangente au point M; si par le point T on mène To parallèle à mT et Tk parallèle aux ordonnées, on aura un parallélogramme KToM qui sera divisé par la diagonale MT en deux également, par conséquent le triangle mTo est égal au triangle MTk, et comme celui-ci ne diffère de MTt que du triangle TtR qui est infiniment petit, par rapport à MTt, on aura MTo = MTt; si par un autre point m' on mène une tangente $m't'$ à la courbe, et que par le point T on lui mène une parallèle To', on aura en supposant les points m et m' infiniment rapprochés, l'espace $mtt'm'm$ égal au

triangle T*oo'*, et ainsi de suite; par conséquent l'espace total compris entre la courbe, l'asymptote et la tangente est égal à la somme de tous les triangles élémentaires dont se compose le triangle MPT, c'est-à-dire au triangle lui-même : si à cet espace on ajoute le triangle *m*PT, on aura pour l'espace total compris entre la courbe, une ordonnée et l'asymptote un espace double de l'aire du triangle fait sur l'ordonnée et la soutangente, et par conséquent égal au parallélogramme fait sur la soutangente et l'ordonnée.

557. Si on veut avoir la portion de l'aire comprise entre la courbe, une ordonnée quelconque et la partie de l'asymptote comprise entre ces deux ordonnées, il est facile de voir qu'on l'obtiendra en construisant un parallélogramme sur la soutangente et la différence des ordonnées, en effet, l'espace total IMPX (*fig.* 24), est égal au parallélogramme fait sur la soutangente PT et l'ordonnée PM, de même l'espace I*mp*X est égal au parallélogramme fait sur la soutangente PT et l'ordonnée *pm*, par conséquent la différence de ces deux espaces, où l'aire M*mp*P, est égale au parallélogramme construit sur la soutangente et la différence des

ordonnées, c'est-à-dire égal au parallélogramme MOQR.

558. Il est aussi facile de voir que la portion de l'aire comprise entre la courbe, deux tangentes quelconques et l'asymptote est égale au triangle qu'on formerait avec les deux tangentes menées aux extrémités de l'arc et dont l'angle compris serait égal à celui que ces deux tangentes font entre elles.

559. Le résultat auquel nous venons d'arriver ci-dessus, quoique singulier en apparence, puisqu'il donne une aire finie pour une surface qui s'étend à l'infini, n'offre cependant rien qui choque trop ouvertement les idées reçues, car si on considère des ordonnées équidistantes entre elles, on aura en menant par l'extrémité de chacune d'elles des parallèles à l'axe des abscisses, une suite de parallélogrammes circonscrits à la courbe, dont la somme surpassera l'aire asymptotique, et comme cette somme donne une aire finie, il en résulte que l'aire comprise entre la courbe, une asymptote et une ordonnée quelconque est aussi une quantité finie. Pour montrer de quelle manière il arrive que la somme des parallélogrammes circonscrits est une quantité finie, désignons par x

la distance de l'origine à la première ordonnée, et par d l'intervalle qui sépare les ordonnées, successives, on aura

$$y = a^x,\ y' = a^{x-d},\ y'' = a^{x-2d},\ y''' = a^{x-3d},\ \text{etc.}$$

or la somme des parallélogrammes circonscrits est à celui qui correspond à la plus grande ordonnée comme la somme de toutes les ordonnées est à la première; ainsi si on désigne par S la somme des parallélogrammes circonscrits et par P le premier de tous ces parallélogrammes, on aura

$$\frac{S}{P} = \frac{y + y' + y'' + \text{etc.}}{y} = 1 + a^{-d} + a^{-2d} + a^{-3d} + \ldots = \frac{a^d}{a^d - 1},$$

par conséquent

$$S = \frac{a^d}{a^d - 1} \cdot P;$$

ainsi le second membre et par suite le premier est une quantité finie.

THÉORÈME.

Le solide engendré par l'aire asymptotique de la logarithmique, en tournant autour de son asymptote, est égal à une fois et demie le cône engendré par le triangle formé par une ordonnée, la tangente et la soutangente qui correspondent à cette ordonnée.

560. Soit MP l'ordonnée qui termine l'espace générateur (*fig.* 25); si par le point *m* placé infiniment près de M, on mène une tangente terminée par l'asymptote, elle peut être considérée comme étant le prolongement du petit arc M*m*. Cela posé, si les triangles MP*t* et MPT font une révolution autour de l'asymptote PZ, la différence des cônes engendrés par les triangles MP*t*, MPT sera égal au cercle dont le rayon est MP multiplié par $\frac{1}{3}$T*t*; par conséquent il sera le tiers du solide engendré par MP*pm*. Si par un point *m'*, placé infiniment près de *m*, on mène une tangente jusqu'à l'asymptote, elle formera avec cette asymptote et la tangente *mt* qui lui est infiniment voisine, un triangle *mtt'* qui, en tournant autour de l'asymptote, sera le tiers du solide élémentaire

engendré par la révolution de *mm't't*, en tournant autour du même axe et ainsi de suite; par conséquent le solide engendré par les triangles élémentaires dont se compose l'espace ZTMz, est contenu trois fois dans celui qui est engendré par les trapèzes élémentaires qui composent l'espace ZPMz; ainsi puisque le premier solide est contenu deux fois dans le cône engendré par le triangle MPT, il n'est donc que la moitié de ce cône; par conséquent le solide dont il s'agit est égal à une fois et demie le cône engendré par le triangle PTM, en tournant autour de l'asymptote.

THÉORÈME.

Le solide engendré par l'espace asymptotique de la logarithmique, en tournant autour de l'ordonnée, est égal au sextuple du cône engendré dans le même mouvement par le triangle formé par cette ordonnée, la tangente correspondante et la soutangente.

561. Soit MZ la courbe dont il s'agit (*fig.* 26), PQ son asymptote, MP l'ordonnée autour de laquelle tourne l'espace asymptotique QPMZ;

si par deux points quelconques de la courbe, mais placés infiniment près l'un de l'autre, on mène deux tangentes mt et $m't'$, elles détermineront un petit triangle élémentaire mtt', qui aura son sommet en t, puisque la tangente $m't'$ est le prolongement de l'élément de courbe mm', le solide engendré par ce triangle, en tournant autour de l'ordonnée MP, sera la différence des deux solides engendrés par les trapèzes $mtPo$ et $mt'Po$, c'est-à-dire la différence de deux troncs de cône de même hauteur; or par la proposition VI du huitième livre de la Géométrie de M. *Legendre*, la solidité d'un tronc de cône est égale à trois cônes qui auraient pour hauteur commune la hauteur du tronc, pour bases, la base supérieure, la base inférieure et une moyenne proportionnelle entre les deux bases; par conséquent si on désigne l'ordonnée mp par y, la distance Pp par k, la soutangente pt par s et la partie tt' par ω, l'expression du solide engendré par le triangle tmt' sera

$$\frac{y}{3}\pi\{(k+s+\omega)^2+k^2+(k+s+\omega)k\}$$

$$-\frac{y}{3}\pi\{(k+s)^2+k^2+(k+s)k\}.$$

Cette expression se réduira, en ne tenant aucun compte des quantités de l'ordre de celles qu'on peut négliger, à

$$\omega y\pi \left\{ k + \tfrac{1}{3} s \right\};$$

si on désigne par t la surface du petit triangle mtt', cette expression deviendra égale à

$$2\pi kt + \tfrac{1}{3}\pi st,$$

puisque $\omega y = 2t$. Si des points m et m' on abaisse des perpendiculaires sur l'asymptote, on aura un trapèze élémentaire $mm'pp$, qui en tournant autour de l'ordonnée MP, engendrera un solide qui sera, à un infiniment petit près, la différence de deux cylindres dont la hauteur commune est y, et dont les rayons des bases sont $k + \omega$ et k, et qui par conséquent aura pour expression

$$\pi y \left\{ (k + \omega)^2 - k^2 \right\},$$

laquelle se réduira en ne tenant aucun compte des quantités négligeables à $2\pi ky\omega$, ou à $4\pi kt$, puisque $\omega y = 2t$.

Si du double de $2\pi kt + \frac{4}{3}\pi st$ qui est l'expres-

sion du double du cône engendré par le triangle mtt', on retranche $4\pi kt$, qui est celle du solide engendré par le petit trapèze $mpp'm'$, il restera $\frac{8}{3}\pi st$; par conséquent, si du double de la somme des conoïdes engendrés par les triangles élémentaires qui composent l'espace asymptotique QMPZ, qui est égal au triangle MPT; on en retranche le solide engendré par la somme des petits trapèzes il restera $\frac{8}{3}\Pi sT$ puisque l'aire QTMZ est égale au triangle MPT; d'ailleurs en retranchant le solide engendré par QPMZ du double de celui qui est engendré par l'espace QPTZ, il reste l'excès du solide engendré par QPMZ sur le cône engendré par le triangle MPT, ou l'excès du solide décrit par QPMZ sur le double du cône engendré par le triangle MPT, ou enfin l'excès du solide décrit par QPMZ sur le double du cône engendré par le triangle MPT; donc le solide dont il s'agit est égal à $\frac{8}{3}\pi sT$ plus deux fois le cône MPT, ou, ce qui revient au même, à $4\pi sT$; puisque le cône MPT $=\frac{4}{3}\pi sT$, et comme $4\pi sT$ est égal à six fois $\frac{4}{3}\pi sT$, il en résulte que le solide engendré par l'espace asymptotique de la logarithmique, en tournant autour d'une ordonnée, est sextuple du cône engendré par le triangle formé par cette ordonnée, la tangente

et

et la soutangente qui correspondent à cette ordonnée.

562. On peut arriver aisément au même résultat en ayant recours au théorème de Guldin; en effet, le solide engendré par le triangle mtt' (*fig.* 25), est égal au produit de l'aire de ce triangle par la circonférence que décrit son centre de gravité ; si donc on désigne par k la distance du sommet de ce triangle à l'axe MP il sera exprimé par t cir. $\left(k+\frac{2s}{3}\right)$, ou bien par.... $2\pi kt+\frac{4}{3}\pi st$; d'ailleurs le solide engendré par le petit trapèze étant égal à $2t$ multiplié par la circonférence que décrit le centre de gravité de ce trapèze, il aura pour expression $2t$. cir. k, ou bien $4\pi kt$. Si du double de la première expression on en retranche la seconde, il restera $\frac{8}{3}\pi st$; d'où il résulte que le double du solide engendré par l'espace QMTZ, diminué de celui qui est engendré par QMPZ, est égal à $\frac{8}{3}\pi s$T; ainsi on aura en ajoutant deux cônes égaux à MPT, le solide décrit par QMPZ; et comme un de ces cônes est égal à $\frac{4}{3}\pi s$T, il en résulte que le solide dont il s'agit est égal à $4\pi s$T, et par conséquent égal au sextuple du cône MPT.

563. Au moyen du théorème que nous venons

d'établir, et de celui de l'article 560, il est facile de trouver le centre de gravité de l'aire asymptotique QMPZ, car le solide engendré par cette aire, en tournant autour d'une ordonnée, étant égal au double de l'aire du triangle TMP, multiplié par la circonférence que décrit le centre de gravité, il en résulte que la distance du centre de gravité à cette ordonnée, est égale à la soutangente; on trouvera de même que la distance du centre de gravité à l'asymptote est égale au quart de la soutangente; ayant les coordonnées du centre de gravité, rien n'est plus facile que de l'assigner.

564. On voit par ce qui vient d'être dit, qu'il est facile de trouver le centre de gravité de l'aire comprise entre la courbe, deux ordonnées quelconques et la portion de l'asymptote comprise entre ces deux ordonnées; on trouvera aussi aisément le centre de gravité de l'aire comprise entre un arc de la courbe, les deux tangentes menées aux extrémités de cet arc et la portion de l'asymptote comprise entre ces deux tangentes. Il en est de même du centre de gravité de l'espace asymptotique terminé à une tangente quelconque à la courbe.

Quadrature d'une Parabole.

565. La parabole s'étendant indéfiniment dans le sens de ses diamètres, rien ne limite l'aire comprise entre ses branches. On peut néanmoins évaluer celle d'un de ses segmens, c'est-à-dire la portion de l'aire comprise entre un arc de la courbe et la droite qui joint ses extrémités; cette courbe est parmi toutes celles que les géomètres ont considérés, la première qui ait offert l'exemple d'une quadrature absolue et rigoureuse, Archimède a démontré le premier que l'aire d'un segment parabolique quelconque est toujours les deux tiers du parallélogramme circonscrit à ce segment : c'est ce théorème que nous allons démontrer.

Soit MAN (*fig.* 26), un segment de parabole; si par le point P, milieu de MN, on mène la droite PA parallèle à l'axe, elle sera un diamètre et divisera toutes les droites parallèles à MN, et par conséquent l'aire du segment en deux parties égales; si par le point M on mène la tangente MT, on aura AT = AP, si par tout autre point *m* de cette courbe, on mène une ordonnée *mp* au diamètre AP, et une tangente *mt* à la même courbe, on aura $At = Ap$, ainsi

$Tt = Pp$; si on prolonge la tangente mt jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente voisine MT en quelque point i, et que par le point m on mène une parallèle au diamètre, on aura un triangle Tit et un parallélogramme $mpPo$ qui auront même base, et qui dans l'infiniment petit auront même hauteur; ainsi l'espace élémentaire Tit du triangle mixtiligne, sera la moitié de l'espace élémentaire correspondant dans le demi-segment de parabole, par conséquent le triangle mixtiligne TAM sera la moitié du demi-segment de parabole, ainsi le demi-segment de parabole est les deux tiers du triangle MPT fait sur l'ordonnée et la soutangente, et par suite les deux tiers du parallélogramme fait sur la moitié de l'abcisse et l'ordonnée; le demi-segment inférieur APN étant égal au demi-segment supérieur APM, il en résulte que le segment total MAN est les deux tiers du parallélogramme qui lui est circonscrit.

Evaluation d'un segment de paraboloïde.

566. Par le point le plus éloigné de la base du segment, concevons une droite parallèle à l'axe de révolution, et par un point de cette droite situé dans l'intérieur de ce segment et à une distance infiniment petite de la base,

concevons un plan qui lui soit parallèle, on aura une tranche infiniment mince dont le volume se confondra avec le cylindre qui aurait pour base celle du segment, et pour hauteur l'épaisseur de la tranche; cela posé, si on conçoit un cône dont le sommet soit sur le diamètre AP de l'autre côté de l'origine, à une distance AT = AP, *fig.* 26, et qui ait même base que le segment de paraboloïde, il sera tangent à la surface de révolution, puisque les intersections du cône, par les plans conduits suivant le diamètre AP, sont tangentes aux paraboles qui sont les intersections de ce même plan avec la surface du paraboloïde. Si on prend ensuite A*t* = A*p*, le point *t* sera le sommet d'un cône dont la surface sera le prolongement de la petite zône élémentaire comprise entre les deux plans infiniment rapprochés, la différence des cônes qui est la partie du solide comprise entre les deux surfaces coniques, sera égale à la base commune multipliée par le tiers de la différence des hauteurs, et par conséquent sera égale au tiers du petit cylindre élémentaire MP*pm* qui lui correspond dans le segment de paraboloïde; ainsi la somme des petits volumes élémentaires compris entre les surfaces coniques infiniment

voisines et ayant leur centre sur le diamètre TP, est le tiers de la somme des cylindres élémentaires correspondans dans le segment de paraboloïde; d'où il résulte que le solide extérieur au segment est contenu trois fois dans ce segment, et par suite quatre fois dans le cône circonscrit : le segment de paraboloïde est donc les trois quarts de ce cône; et comme ce cône est les deux tiers du cylindre circonscrit au segment, puisqu'il a même base et une hauteur double, il en résulte que ce segment de paraboloïde est les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit, ou, ce qui revient au même, la moitié de ce même cylindre.

567. Si on voulait avoir le centre de gravité d'un segment de paraboloïde, il faudrait le concevoir décomposé en tranches infiniment minces d'égales épaisseurs et parallèles à la base, le centre de gravité de chacune d'elles se trouvant sur la droite menée par le sommet du segment parallèlement à l'axe de révolution, le centre de gravité du segment s'y trouvera aussi, et comme les intensités des forces appliquées aux différens points de cette droite varieront dans le rapport des carrés des ordonnées d'une section faite suivant le diamètre, et par conséquent

dans le rapport de leur distance au sommet, il s'ensuit que le centre de gravité se trouvera aux deux tiers du diamètre, à partir de l'origine, puisque le centre de gravité d'une droite aux différens points de laquelle on applique des forces proportionnelles aux distances de ces mêmes points à l'une des extrémités, peut être considéré comme le centre de gravité d'un triangle dont la base serait divisée par une des extrémités en deux parties égales, et dont le sommet serait placé à l'autre extrémité.

THÉORÈME.

Le produit d'un nombre quelconque de facteurs variables, qui pris ensemble font une même somme, est un maximum, *lorsque tous les facteurs sont égaux entre eux.*

568. Supposons d'abord deux facteurs dont la somme soit $2p$; si on représente l'un des facteurs par $p+\delta$, l'autre sera $p-\delta$, et le produit du premier par le second sera $p^2-\delta^2$; or ce produit est toujours moindre que p^2; ainsi le produit de deux facteurs qui font une même somme est un *maximum*, lorsque les deux facteurs sont égaux.

569. Si on prend trois facteurs dont la somme soit $3p$, et que l'on représente l'un de ces facteurs par $p+a$, un autre par $p+b$, le troisième sera $p-a-b$, et le produit des trois facteurs sera $p^3-(a^2+b^2)p-ab(a+b+p)$; or parmi les trois facteurs $p+a, p+b, p-a-b$, il s'en trouve nécessairement deux qui sont à la fois plus grands ou plus petits que p, puisque si tous trois étaient plus grands ou plus petits que p, leur somme serait plus grande ou plus petite que $3p$, ce qui est contre l'hypothèse; ainsi on peut toujours supposer que a et b sont de même signe; si on les suppose positifs, le produit $p^3-(a^2+b^2)p-ab(p+a+b)$ est nécessairement moindre que p^3; s'ils sont négatifs, le produit $p^3-(a^2+b^2)p-ab(p-a-b)$ est encore plus petit que p^3, puisque $p-a-b$ est positif; ainsi le produit de trois facteurs qui font une même somme, est un *maximum*, lorsque les trois facteurs sont égaux; on voit de plus que le produit de trois facteurs inégaux, qui font une même somme, augmente à mesure que l'inégalité de ces facteurs diminue.

570. En général le produit d'un nombre quelconque de facteurs qui font une même somme, ne peut être un *maximum*, à moins que les

facteurs ne soient égaux entre eux ; car si $m, n, p, q, r, \ldots$ étaient les facteurs qui correspondent au produit *maximum*, et qu'il pût exister de l'inégalité entre deux facteurs m et n par exemple, on pourrait sans rien changer aux facteurs $p, q, r, \ldots$ substituer aux facteurs m et n deux facteurs égaux dont la somme serait la même, et qui donnerait un produit plus grand que $mnpqr\ldots$; par conséquent ce dernier produit ne serait point le produit *maximum*, ce qui est contre l'hypothèse.

571. De ce qui précède il résulte que si on veut partager un triangle en trois autres triangles qui aient un sommet commun, et dont le produit soit un *maximum*, il faut qu'ils soient tous égaux entre eux, et par conséquent que le sommet commun de ces triangles se trouve au centre de gravité du triangle proposé.

PROBLÈME.

Partager une quantité donnée en un nombre quelconque de parties, de manière que le produit de ces parties élevées chacune à des puissances données, soit un maximum.

572. Si on désigne par a la quantité donnée, et que l'on représente par $x, y, z, t\ldots$, les par-

ties dans lesquelles on décompose cette quantité, et que m, n, p, q...., marquent les degrés des puissances de x, y, z, t....., il faudra qu'on ait à la fois

$$x + y + z + t + \ldots\ldots = a,$$

et

$$x^m y^n z^p t^q \ldots\ldots = \textit{maximum}.$$

Pour satisfaire à la dernière condition, nous observerons qu'on a toujours

$$x^m y^n z^p t^q \ldots = m^m n^n p^p q^q \ldots \left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{z}{p}\right)^p \left(\frac{t}{q}\right)^q \ldots$$

et comme $m^m p^p q^q r^r$ est constant, on ne peut satisfaire à la condition énoncée qu'autant que

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{z}{p}\right)^p \left(\frac{t}{q}\right)^q \ldots\ldots$$

sera un *maximum*. Or ce produit contient un nombre m de facteurs égaux à $\frac{x}{m}$, dont la somme fait x, un nombre n de facteurs égaux à $\frac{y}{n}$, dont la somme fait y, un nombre p de facteurs égaux à $\frac{r}{p}$, dont la somme fait r, un nombre q de facteurs égaux à $\frac{t}{q}$, dont la somme fait t, et ainsi de suite, ainsi tous ces facteurs

sont au nombre de $m+n+p+q\ldots$; et comme leur somme est une quantité constante égale à a, le *maximum* de leur produit ne peut avoir lieu à moins qu'ils ne soient tous égaux entre eux; par conséquent chacune des parties est égale à

$$\frac{a}{m+n+p+q+\ldots}$$

et comme x contient un nombre m de ces parties, que y en contient un nombre n, que z en contient un nombre p, que t en contient un nombre q, et ainsi de suite, on trouvera que

$$x = \frac{ma}{m+n+p+q\ldots}$$
$$y = \frac{na}{m+n+p+q\ldots}$$
$$z = \frac{pa}{m+n+p+q\ldots}$$
$$t = \frac{qa}{m+n+p+q\ldots}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ainsi les parties dans lesquelles il faut décomposer la quantité a, sont proportionnelles aux degrés de leur puissance.

573. Ce qui vient d'être démontré peut facilement s'étendre au cas où les puissances

seraient fractionnaires; car si le produit

$$x^{\frac{m}{m'}} y^{\frac{n}{n'}} z^{\frac{p}{p'}} t^{\frac{q}{q'}} \ldots$$

est un *maximum*, il faut que ce produit élevé à la puissance $m'n'p'q'\ldots$, soit un *maximum*; et comme par cette opération, on ramène le cas que nous considérons à celui où il s'agirait de faire un *maximum* du produit

$$x^{mn'p'q'\ldots} y^{nm'p'q'\ldots} z^{pm'n'q'\ldots} t^{qm'n'p'\ldots}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

il faut que les valeurs de $x, y, z, t\ldots$ soient respectivement égales à la quantité a, multipliée par le rapport de l'exposant de chacune des variables dans ce dernier produit, à la somme des exposans de toutes ces variables; ainsi on aura encore

$$x = \frac{m}{m'} a : \left\{ \frac{m}{m'} + \frac{n}{n'} + \frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \ldots \right\}$$

$$y = \frac{n}{n'} a : \left\{ \frac{m}{m'} + \frac{n}{n'} + \frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \ldots \right\}$$

$$z = \frac{p}{p'} a : \left\{ \frac{m}{m'} + \frac{n}{n'} + \frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \ldots \right\}$$

$$t = \frac{q}{q'} a : \left\{ \frac{m}{m'} + \frac{n}{n'} + \frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \ldots \right\}$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

PROBLÈME.

On propose d'inscrire dans un triangle donné un parallélogramme dont deux côtés se trouvent sur deux côtés de ce triangle et dont le produit de la puissance m *de la base par la puissance* n *du côté adjacent soit un maximum.*

574. Soit ABC le triangle proposé (*fig.* 27), ADEF le parallélogramme dont il s'agit, si on considère les triangles ABC et BDE, on aura BD : DE :: AB : AC, de cette proportion on tire $DE = \frac{AC}{AB} \cdot BD$, ainsi

$$\overline{AF}^{m} \times \overline{AD}^{n} = \frac{\overline{AC}^{m}}{\overline{AB}^{m}} \overline{BD}^{m} \times \overline{AD}^{n}$$

par conséquent le produit de $\overline{AF}^{m}$ par $\overline{AD}^{n}$ ne peut être un maximum à moins que $\overline{BD}^{m} \times \overline{AD}^{n}$ ne soit aussi un maximum, et comme les facteurs AD et BD font toujours une même somme égale à AB, il faut que les lignes BD et AD soient entre elles dans le rapport de m à n, et par suite que la base supérieure du parallélogramme divise les côtés adjacens à la base du

triangle en parties qui soient entre elles dans le rapport de m à n.

PROBLÈME.

Par un point pris sur une hyperbole, on propose de mener une tangente à cette courbe.

575. Soit $x^m y^n = a^{m+n}$ l'équation de l'hyperbole dont il s'agit, M le point de la courbe par lequel on veut mener la tangente (*fig.* 28), si Tt est la tangente dont il s'agit, et que par un point M′ différent de M on mène les ordonnécs M′ P′, M′p' sur les asymptotes AY et AX, une d'elles au moins coupera la tangente en un point; si par ce point I on mène des droites respectivement parallèles aux asymptotes, on aura un parallélogramme IKCp' qui donnera

$$\overline{Cp}^{m} \times \overline{pM}^{n} > \overline{Cp}^{m} \times \overline{p'I}^{n},$$

par conséquent le parallélogramme MPCp est de tous les parallélogrammes inscrits dans le triangle TCt celui dont le produit de la puissance m de la base par la puissance n du côté adjacent est un maximum, ainsi il faut en vertu du théorème précédent, que les par-

ties de la tangente MT et nt interceptées entre ce point et les asymptotes soient entre elles comme m est à n, et que la soutangente PT du point M soit à l'abscisse correspondante CP dans le même rapport.

PROBLÈME.

Etant donné une hyperbole dont l'équation est $x^m y^n = a^{m+n}$, *on propose de trouver l'aire comprise entre la courbe, une asymptote et une ordonnée à cette asymptote.*

576. Soit ZMZ' l'hyperbole proposée (*fig.* 29), AX, AY ses asymptotes, et supposons qu'il s'agisse de trouver l'aire ZMpY. Si par le point M, on mène la tangente Mt, on aura

$$At : Ap :: m + n : n,$$

par conséquent

$$At = \frac{m+n}{n} Ap = \frac{m+n}{n} y.$$

Si par un point M' placé infiniment près du point M, on mène une tangente M't', on aura

$$At' = \frac{m+n}{m} Ap' = \frac{m+n}{n} y';$$

si de cette équation on retranche la première

on aura à cause de $At' - At = tt'$, et de $y' - y = pp'$ l'équation suivante

$$tt' = \frac{m+n}{n} pp';$$

or le point M′ étant placé à une distance infiniment petite du point M, la tangente M′t' est le prolongement du petit arc MM′ de sorte que le petit triangle Mtt' qui a pour hauteur Mp, est au trapèze MM′ $p'p$ :: tt' : $2pp'$, puisque le petit trapèze MM′$p'p$ ne diffère du rectangle dont pp' est la base et Mp la hauteur que d'un infiniment petit par rapport à ce même rectangle, d'ailleurs

$$tt' : 2pp' :: \frac{m+n}{n} pp' : 2pp' :: m+n : 2n,$$

ainsi le petit triangle élémentaire tMt' est au petit trapèze qui lui correspond :: $m+n : 2n$, si on prend une suite de points M″, M‴, etc. placés sur la courbe à une distance infiniment petite l'un de l'autre, et que par chacun de ces points on mène des tangentes à la courbe, elles formeront avec l'asymptote AY une suite de triangles élémentaires qui seront aux trapèzes correspondans :: $m+n : 2n$, par conséquent la somme des petits triangles élémentaires

taires est à la somme des trapèzes correspondans :: $m+n : 2n$, or la première somme, est égale à $Mt\tau Q$; la seconde est égale à $Mpq Q$, ainsi on aura

$$Mt\tau Q : Mpq Q :: m+n : 2n,$$

de cette proportion on en déduit

$$Mpt - Qq\tau : Mpq Q :: n-m : 2n,$$

d'où

$$Mpq Q = \frac{2n}{n-m}\{Mpt - Qq\tau\};$$

mais on a,

$$Mpt : MKAp :: pt : 2Ap :: m : 2n,$$

par conséquent

$$Mpt = \frac{m \cdot P}{2n},$$

on aura de même

$$Qq\tau = \frac{m.P'}{2n},$$

si on remplace les quantités Mpt et Qqt dans l'expression de $Mpq Q$, on aura

$$Mpq Q = \frac{m}{n-m}(P - P');$$

or de l'équation $x^m y^n = a$ on en déduit $x^n y^n = ax^{n-m}$; ainsi puisque le second membre devient nul quand on y fait $x = 0$, lorsque n est plus grand que m, il en résulte que si l'ordonnée du point Q est infinie, $P' = 0$, par

conséquent l'espace $ZMpY = \frac{mP}{n-m}$, si au contraire on a $n < m$, P′ est infini et par suite aussi l'aire ZMpY. En raisonnant ici à peu de chose près comme nous l'avons fait plus haut, on en déduirait aisément le volume du solide engendré par l'espace ZMpY ; cela est trop facile pour mériter que nous nous y arrêtions.

PROBLÈME.

On propose de mener par un point pris sur l'hyperbole ordinaire une tangente à cette courbe.

577. Soit ZMZ′ (*fig.* 30) une branche d'hyperbole dont l'équation rapportée à ses asymptotes est $xy = K^2$; si par le point M on conçoit une tangente terminée aux asymptotes, et que par un point E de la courbe, on mène les coordonnées EF et EB, l'une d'elles au moins rencontrera la tangente T*t* en un point *i* ; si par ce point de rencontre on mène des parallèles aux asymptotes, on aura un parallélogramme CB*ik* qui sera moindre que le parallélogramme CBEF, et par conséquent moindre que le parallélogramme MPC*p* qui correspond au point de tangence ; ainsi de tous les parallélogrammes inscrits dans le triangle TC*t*, le plus grand est celui dont

un des sommets repose sur le point de tangence, et comme d'ailleurs le plus grand des parallélogrammes qu'on peut inscrire dans un triangle, divise les côtés de ce triangle en deux également, il en résulte que MT=Mt et CP=PT; par conséquent les parties de la tangente à l'hyperbole, interceptées entre le point de tangence et les asymptotes sont égales entre elles, de sorte que la soutangente est égale à l'abscisse.

Observation. Dans la figure qui se rapporte à ce problème, nous avons fait les coordonnées rectangulaires, afin qu'elle soit plus correcte; mais il est aisé de voir que le raisonnement que nous avons établi est indépendant de l'angle que les coordonnées font entre elles.

THÉORÈME.

Si on coupe une hyperbole ordinaire par une droite, les parties de cette droite interceptées entre la courbe et les asymptotes, seront égales entre elles.

578. Soit ZMZ' une des branches de l'hyperbole ordinaire (*fig.* 31), LK la droite dont il s'agit; si on désigne les coordonnées du point P par x et y, et celles du point Q par x' et y', on aura, par la nature de la courbe, $xy = x'y'$, et par suite

$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y}$; ainsi, si par les points P et Q on mène des droites parallèles aux asymptotes, on aura

$$AQ : BP :: AD : DB;$$

de cette proportion on déduit

$$AQ - AD : BP - DB :: AD : DB,$$

ou, ce qui revient au même,

$$DQ : DP :: AD : DB;$$

par conséquent AB est parallèle à LK; on aura donc AB=LP et AB=QK, et par suite LP=QK.

579. Si plusieurs droites sont parallèles et terminées aux asymptotes, et que par le centre de l'hyperbole et le milieu d'une de ces droites, on mène une autre droite, elle divisera les premières droites en deux parties égales; et comme les parties de ces droites interceptées entre la courbe et les asymptotes sont égales, il en résulte que les parties de ces lignes qui sont terminées à la courbe, sont divisées par la même droite en deux parties égales, et que cette même ligne est un diamètre; de plus comme la droite menée par l'origine du diamètre parallèlement aux ordonnées à ce diamètre est divisée en deux parties égales, il faut qu'elle soit tangente à la courbe, car, si cela

n'avait pas lieu, la même ligne serait sécante, et les parties d'une sécante, interceptées entre la courbe et les asymptotes, ne seraient point égales entr'elles, ce qui est contraire à ce qui a été démontré précédemment.

Réciproquement, si par le centre on mène une droite qui coupe les deux branches de l'hyperbole, toutes les lignes menées parallèlement à la tangente et terminées à la courbe, seront divisées par cette même droite en deux parties égales.

THÉORÈME.

L'aire de l'hyperbole ordinaire comprise entre la courbe, une ordonnée quelconque et l'asymptote est infinie.

580. Considérons l'espace ZMPY, (*fig.* 32), si par le point M on mène la tangente MP', le triangle P'MP sera la moitié du parallélogramme PCVM fait sur l'abscisse et l'ordonnée du point M; si donc on prend le parallélogramme PCVM pour unité, le triangle PMP' sera représenté par $\frac{1}{2}$, de plus si par le point P' on mène P'M' parallèle à CV et que par le point M' on mène la tangente M'P'', le triangle P'M'P'' sera la moitié du parallélogramme fait sur les coordonnées du point M', et par conséquent sera aussi représenté

par $\frac{1}{4}$, si par le point P'' on mène P''M'' parallèle à CV, et que par le point M'' on mène la tangente M''P''', on trouvera aussi que le triangle M''P''P''' est égal à $\frac{1}{8}$; en continuant à raisonner comme nous l'avons fait ci-dessus, on verra que l'espace asymptotique contient le triangle P'PM une infinité de fois, de sorte que cet espace sera infini.

THÉORÈME.

Si par un point pris sur une hyperbole ordinaire on mène une ordonnée à une asymptote, le solide engendré par l'aire asymptotique qui repose sur cette ordonnée en tournant autour de cette asymptote est fini en volume, quoique étendu à l'infini, et il est égal au cylindre droit dont le rayon de la base serait la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette asymptote et dont la hauteur serait la coordonnée menée par ce point parallèlement à cette asymptote.

581. Nous supposerons pour éviter la confusion des lignes, que la figure se rapporte à une hyperbole équilatère, mais le raisonnement sera tout à fait indépendant de l'angle des coordonnées et par conséquent conviendra à une hyperbole quelconque mais du premier ordre.

Soit ZMPY (*fig.* 33) l'aire génératrice; si par le point M on mène la tangente MQ, on aura PQ=CP, ainsi le solide engendré par le triangle MPQ sera le tiers d'un cylindre dont le rayon de la base serait la perpendiculaire abaissée du point M sur l'asymptote CY et dont la hauteur serait égale à CP. Si par le point M′ pris sur la courbe et à une distance infiniment petite du point M on mène la tangente M′Q′, cette tangente pourra être considérée comme étant le prolongement de l'élément de courbe MM′, et le solide engendré par le triangle MQ Q′ comme étant égal à la différence de deux cônes qui auraient pour base commune la perpendiculaire abaissée du point M sur l'asymptote CY, et dont la différence des hauteurs serait PP′, mais si par le point M′ on abaisse une perpendiculaire MQ sur l'axe des y, on aura, à cause de CQ′=2CP et de CQ′ = 2CP′, l'équation

$$CQ' - CQ = 2\{CP' - CP\},$$

et par suite QQ′=PP′, donc le solide engendré par le triangle MQQ′ est les deux tiers du cylindre élémentaire dont la hauteur serait QQ′ et dont le rayon de la base serait égal à la distance du point M à l'axe CY; en continuant ainsi on trouvera

que la somme des conoïdes élémentaires, ou le solide engendré par l'espace ZMQY, est égal aux deux tiers du solide engendré par l'espace total ZMPY, par conséquent le solide engendré par le triangle MPQ est le tiers de celui engendré par l'espace total ZMPY, ainsi le solide entier est égal à un cylindre dont le rayon de la base serait la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe des y, et dont la hauteur serait égale à l'ordonnée CP de ce point.

582. Quelque singulier que paroisse le résultat auquel nous venons d'arriver, il n'en est pas moins exact; mais pour mieux concevoir comment il peut se faire que l'espace ZMPY (*fig.* 34), qui est infini en étendue et en surface, peut engendrer un solide dont le volume soit fini, prenons sur l'asymptote CY les parties PP′, P′P″, P″P‴, etc., qui soient en raison double, et de manière que PP′ soit égal à PP′, on aura

$$CP' = 2CP,\ CP'' = 2CP',\ CP''' = 2CP'',\ldots$$

par conséquent

$$P'M' = \tfrac{1}{2}PM,\ P''M'' = \tfrac{1}{2}P'M',\ P'''M''' = \tfrac{1}{2}P''M'',\ldots.$$

et ainsi de suite. Ainsi tandis que les hauteurs des parallélogrammes inscrits PP′M′p, P′P″M′q′,

$P''P'''M'''p''$, etc., croissent en raison double, les bases décroissent dans le même rapport, de sorte qu'ils sont tous égaux entre eux et à $\frac{1}{2}$ CPMQ, par conséquent cet espace est infini. Si on conçoit les rectangles circonscrits $PP'QM$, $P'P''Q'M'$, etc. les volumes engendrés par chacun d'eux équivaudront à des cylindres dont les bases décroîtroient en raison quadruple, et les hauteurs croîtroient en raison double ; ainsi ces cylindres décroîtront seulement en raison double ; mais le premier est égal au cylindre dont la hauteur serait CP et dont le rayon de la base serait la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe des y, ainsi la somme de tous ces cylindres en prenant celui-ci pour unité, sera exprimée par $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ etc., et comme cette suite est égale à 2, il s'ensuit que le solide engendré par l'espace asymptotique est moindre que 2 et par conséquent égal à un volume fini.

PROBLÈME.

Trouver l'aire d'un polygone en fonction des coordonnées des sommets de ce polygone.

583. Soient c, c', c'', c'''.... les côtés successifs d'un polygone, α, β, α', β', α'', β'',... les cordonnées de ses sommets; si d'un point pris dans l'intérieur du polygone, et dont les coor-

données sont x' et y', on abaisse des perpendiculaires sur ces côtés, leurs expressions seront respectivement

$$\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{y' - a'x' - b'}{\sqrt{1+a'^2}}, \quad \frac{y' - a''x'' - b''}{\sqrt{1+a''^2}}, \ldots$$

a, a', a'', a''', ... désignant respectivement les tangentes trigonométriques des angles que font les côtés c, c', c'', c''', ... avec l'axe des abscisses, et b, b', b'', b''', ... les distances de l'origine des coordonnées aux points où les côtés coupent l'axe des y (1); si on multiplie

(1) Soient x' et y' les coordonnées du point M (*fig.* 35); si de ce point on abaisse des perpendiculaires MP et MQ, l'une à la droite BP, dont l'équation est $y = ax + b$, et l'autre à l'axe BX des abscisses, on aura un triangle MoP rectangle en P, qui donnera

$$MP = Mo \sin MoP = Mo \cos \alpha ;$$

or Mo est égal à l'ordonnée du point M, diminuée de l'ordonnée de la droite BP qui correspond à l'abscisse $AQ = x'$; ainsi cette ordonnée $= ax' + b$; donc... $Mo = y' - ax' - b$; si donc on désigne par P la perpendiculaire MP, on aura

$$P = (y' - ax' - b) \cos \alpha ;$$

or

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\tang^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}};$$

donc enfin

$$P = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}}$$

la première par c, la seconde par c', la troisième par c'', et ainsi de suite, on aura évidemment le double de l'aire du polygone, de sorte qu'en désignant ce polygone par P, il viendra

$$2P = c\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}} + c'\frac{y' - a'x' - b}{\sqrt{1+a'^2}} +$$

$$c''\frac{y' - a''x' - b''}{\sqrt{1+a''^2}} \ldots = Ay' - Bx' - C;$$

mais l'aire du polygone étant indépendante des coordonnées x' et y', on doit avoir

$$A = 0,\ B = 0 \text{ et } 2P = -C;$$

ainsi on a

$$2P = -\frac{bc}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{b'c'}{\sqrt{1+a'^2}} - \frac{b''c''}{\sqrt{1+a''^2}} - \ldots$$

or

$$b = \beta - \alpha.\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} = \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha - \alpha'};$$

d'ailleurs

$$\frac{c}{\sqrt{1+a^2}} = c\cos\gamma = \alpha' - \alpha;$$

donc

$$\frac{bc}{\sqrt{1+a^2}} = \alpha\beta' - \beta\alpha',$$

par conséquent

$$2P = \alpha\beta' - \beta\alpha' + \alpha'\beta'' - \beta''\alpha' + \alpha''\beta''' - \beta''\alpha''' + \text{etc.}$$

formule remarquable par son élégance et sa simplicité.

584. On peut arriver très-facilement au résultat précédent par des considérations tirées de la Géométrie ordinaire. En effet un polygone dont toutes les parties sont situées dans l'un des angles que forment les axes auxquels on rapporte les coordonnées des sommets (*fig.* 36), peut être considéré comme étant la différence de deux polygones qui auraient pour base commune la partie de l'axe des abscisses comprises entre celles des perpendiculaires abaissées des sommets sur cet axe qui sont les plus distantes, et pour côtés adjacens ces mêmes perpendiculaires; or, si on évalue les trapèzes dans lesquels se décomposent les polygones, lorsque de chacun de leurs angles, on abaisse des perpendiculaires sur la base, il est évident que l'excès du double du polygone convexe sur le double du polygone concave, c'est-à-dire le double du polygone dont il s'agit aura pour expression

$$\alpha')(\beta + \beta') + (\alpha' - \alpha'')(\beta' + \beta'') + \cdots.$$

or le dernier terme de chaque produit est détruit par le premier terme du produit suivant, à l'exception de celui du dernier produit qui est détruit par le premier terme du premier produit; il ne reste donc de chaque produit que les termes dans lesquels les deux facteurs n'ont pas les mêmes accens, on a donc, comme précédemment,

$$2P = \alpha\beta' - \beta\alpha' + \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' + \alpha''\beta''' - \beta''\alpha''' + \text{etc.}$$

C'est encore ce qu'on peut obtenir autrement, car le double de l'aire du polygone peut être mis également sous ces deux formes

$$2P = (\alpha - \alpha')(\beta + \beta') + (\alpha' - \alpha'')(\beta' + \beta'') + \text{etc.}$$

$$2P = (\alpha + \alpha')(\beta - \beta') + (\alpha' + \alpha'')(\beta' - \beta'') + \text{etc.}$$

si on prend la demi-somme du résultat qu'on obtient en ajoutant ces deux expressions, on aura le même résultat que celui qu'on a déjà trouvé.

585. De l'équation $A = 0$, il résulte qu'on a

$$\frac{c}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{c'}{\sqrt{1+a'^2}} + \frac{c''}{\sqrt{1+a''^2}} + \text{etc.} = 0,$$

c'est-à-dire que la somme des produits des côtés

d'un polygone par les cosinus des angles qu'ils font avec une droite quelconque tracée dans son plan, est égale à zéro.

Les formules que nous venons de donner ont paru pour la première fois dans l'ouvrage qui a pour titre : *Recueil de Problèmes résolus par des considérations purement géométriques ;* depuis cette époque, M. Monge y a ajouté des formules semblables pour trouver le volume d'un polyèdre en fonction des coordonnées des sommets. *Voyez* le tome XII du Journal de l'École Polytechnique.

THÉORÈME.

Si par un point pris dans le plan de deux droites on mène plusieurs sécantes, et que l'on joigne les intersections de ces dernières droites avec les premières par de nouvelles droites, les intersections de celles-ci seront situées sur une même droite qui passera par le point de concours des deux premières.

586. Soit ABC un angle (*fig.* 37), si d'un point D pris au dedans ou au dehors de cet angle, et

que nous supposerons au dehors, on mène une suite de droites DG, DE, DC, etc., on aura une suite de quadrilatères dont les intersections des diagonales seront toutes situées sur une même ligne droite ; en effet, si on prend un point S au dehors du plan des deux droites BA, BC, et que par ce point et chacune des droites BA, BC, on mène les plans SBA, SBC, et que suivant la droite SD et les droites DG, DE, DC, etc., on conduise des plans SDG, SDE, SDC, etc., les intersections de ces plans avec un plan *abc* parallèle à SD seront des droites parallèles entre elles ; si on tire les diagonales FG, HE ; AE, FC ; etc., et que suivant ces diagonales et le point S on conduise des plans, les intersections de ces plans avec le plan *abc*, seront les diagonales des trapèzes *ghfe*, *afec*, etc. or les intersections des diagonales de ces trapèzes sont toutes situées sur une même droite passant par le point de concours des deux droites proposées, ainsi les points d'intersections du plan ABC avec les lignes menées du point S aux points d'intersections des diagonales des trapèzes sont aussi en ligne droite, mais ces points d'intersections sont ceux des points d'intersections des diagonales des quadrilatères ; par conséquent ces points sont sur une même

ligne droite, de plus cette ligne doit passer par le point de concours B des deux droites AB, CB puisqu'elle se trouve dans le plan S*bi*.

THÉORÈME.

Si par un point pris dans le plan d'une section conique, on mène des sécantes à cette courbe, et que l'on joigne les points d'intersections qui se trouvent sur une sécante quelconque avec ceux qui se trouvent sur une autre sécante, ces droites se couperont en une suite de points qui seront situés sur une même ligne droite.

587. Soit BDFGEC une section conique (*fig.* 38), A un point du plan de cette section que nous supposerons extérieur à la courbe, si par ce point on mène tant de sécantes AG, AE, AC, etc. qu'on voudra, et que l'on joigne par des droites les points d'intersections de chacune des sécantes avec les points d'intersections de la courbe avec les autres sécantes, les points d'intersections H, I, etc., de toutes ces droites se trouveront nécessairement sur une même ligne droite. En effet si on prend un point

S au dehors de la section, et que l'on considère ce point comme le sommet d'un cône dont toutes les génératrices s'appuieraient sur la courbe BDFGEC, les intersections des plans SAC, SAE, SAG, etc. avec un plan *bdfgec* parallèle à AS, seront des droites parallèles à AS et par conséquent parallèles entre elles; or si dans une section conique telle que *bdfgec* un système de cordes sont parallèles, que l'on joigne les milieux de deux quelconques d'entr'elles par une droite, cette même droite divisera toutes les autres cordes en deux également; de plus elle contiendra les points d'intersections des droites menées des extrémités de chacune de ses cordes aux extrémités des autres cordes, ainsi les points *h*, *i*, etc. sont situés sur une même droite; d'ailleurs les lignes menées du sommet S à ces points d'intersections coupent le plan BEFGEC en des points qui sont les intersections des lignes correspondantes dans la figure proposée, par conséquent ces points sont situés sur une droite qui est l'intersection du plan BDFGEC avec le plan S*hi*.

La figure dont nous avons fait usage se rapporte au cas où la section est un cercle ou une

ellipse et où le point d'où partent les sécantes est extérieur à la courbe; mais le raisonnement est tout à fait indépendant de l'une ou de l'autre supposition, de sorte que le théorème a lieu de quelqu'espèce d'ailleurs que soit la section comprise, et quel que soit le point par lequel les sécantes soient menées.

PROBLÈME.

Étant donnés les côtés d'un triangle sphérique, trouver les angles.

588. Soit ABC un triangle sphérique (*fig.* 39), si on prolonge les deux côtés AB, AC jusqu'à leur rencontre en A′, et que l'on tire l'arc de grand cercle AA′ de manière qu'il divise l'angle A en deux parties égales, chacun des points de cet arc sera également éloigné des deux côtés AB, AC ; si on divise ensuite les angles ABC, A′BC en deux parties égales par les arcs de grands cercles BD, B′D, les points d'intersections D et D′ de ces arcs avec l'arc AA′ seront également distans du côté BC et des deux autres arcs ABA′, ACA′, par conséquent le point D est le pôle du cercle qui touche les trois côtés du triangle ABC et le point D′ est

le pôle du cercle qui toucha le côté BC et le prolongement des deux autres côtés AB, AC; cela posé, on aura dans le triangle ADE

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin AE}{\sin DE},$$

dans le triangle AD'E on aura

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin AE'}{\sin D'E'},$$

multipliant ces deux égalités, on aura

$$\text{tang}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin AE \sin AE'}{\sin DE \sin D'E'},$$

si on considère le triangle BDE, on aura

$$\sin DE = \sin BE \text{ tang } BDE,$$

dans le triangle D'BE', on aura

$$\sin D'E' = \sin BE' \text{ tang } D'BE',$$

multipliant ces deux dernières égalités, membre à membre, on aura

$$\sin DE \sin D'E' = \sin BE \sin BE' \text{ tang } BDE \text{ tang } D'BE',$$

Or l'angle DBE $= \frac{1}{2}$ ABC; l'angle D'BC' $= \frac{1}{2}$ CBA'; ainsi les deux angles DBE, D'BE' pris ensemble

équivalent à la demi-somme des angles ABC, CBA, c'est-à-dire à un droit; par conséquent tang D'BE' = cot DBE, ainsi on aura

$$\text{tang DBE tang D'BE'} = 1,$$

partant

$$\sin DE \sin D'E' = \sin BE \sin BE',$$

substituant dans l'expression de $\text{tang}^2 \frac{1}{2} A$ pour sin DE sin D'E' la valeur qu'on vient de trouver, on aura

$$\text{tang}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin AE \sin AE'}{\sin BE \sin BE'}.$$

Or BM = BE'; CH = CF', donc BC = BE' + CF', ajoutant de part et d'autre AB + AC, on aura pour la somme des trois côtés, AE' + AF' ou 2AE'; si donc on désigne la somme de ces trois côtés par $2p$, on aura $AE' = p$, de plus on aura, à cause de BE = BG et de CF = CG, BE + CF = BC, ainsi l'excès de la somme des trois côtés du triangle ABC sur le double de BC, sera égal à AE + AF ou 2AE, on aura donc en désignant par a le côté opposé à l'angle A, $2AE = 2p - 2a$ et par suite $AE = p - a$, on voit de même à cause de AE = AF et de CG = CF, que AE + CG = AC = b, et que si de la somme des trois côtés on retranche

2AC, il restera BE + BG = 2BE, par conséquent 2BE = 2p — 2b et par suite BE = $p - b$. De plus, on aura, à cause que AE′ = p et de BE′ = AE′ — AB, l'équation

$$BE' = p - c,$$

si donc on substitue dans l'expression de $\text{tang}^2 \frac{1}{2} A$ trouvée plus haut pour AE, BE, BE′ et AE′ les expressions qu'on vient de trouver, on aura

$$\text{tang}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin p . \sin p - a}{\sin (p-b) \sin (p-c)},$$

d'où l'on tire

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin p . \sin (p - a)}{\sin (p-b) \sin (p-c)}},$$

On trouverait de la même manière les formules qui donnent les expressions de $\sin \frac{1}{2} A$ et de $\cos \frac{1}{2} A$ en fonction des sinus des côtés du triangle ; mais dans les applications numériques on doit préférer la formule précédente, parce que les variations des tangentes étant beaucoup plus rapides que celles qui se rapportent aux sinus et aux cosinus, l'erreur qu'on peut commettre dans l'évaluation de l'angle est nécessairement moindre.

THÉORÈME.

Les perpendiculaires abaissées des sommets des angles d'un triangle rectiligne sur les côtés opposés se coupent en un même point.

589. Soit ABC un triangle (*fig.* 40), si par les sommets des angles de ce triangle on mène des droites respectivement parallèles aux côtés opposés, on aura un triangle DEF circonscrit au triangle ABC ; cela posé, si on considère les parallélogrammes ABCF, ADBC, on aura... AD = BC et AF = BC et par suite AD = AF. Si on considère les parallélogrammes ABCF et ABEC, on aura CF = AB, CE = AB, ainsi CF = CE, on déduira aussi à l'aide des parallélogrammes ACBD, ABEC que la droite BD est égale à BE, par conséquent les sommets du triangle ABC sont les milieux des côtés du triangle DEF. Ainsi les perpendiculaires abaissées des sommets du triangle ABC sur les côtés opposés sont les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du triangle DEF, et comme les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un point, il en résulte aussi, que les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés opposés se coupent en un même point.

THÉORÈME.

Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sphérique sur les côtés opposés se coupent en un même point, et ce point est le pôle du cercle inscrit au triangle que l'on forme en joignant les pieds de ces perpendiculaires par des arcs de grands cercles.

590. Soit ABC un triangle sphérique (*fig.* 41), si des deux points B et C on abaisse des perpendiculaires BE, CD, sur les côtés opposés, elles se couperont en un point O, si on joint ce point et le centre de la sphère auquel le triangle ABC appartient par la droite SO, et que l'on coupe cette droite par un plan qui lui soit perpendiculaire, il résultera des intersections de ce plan avec les trois plans ASB, BSC, ASC un triangle *abc* dont les perpendiculaires abaissées des points *b* et *c* sur les côtés opposés se couperont au point *o* d'intersection du plan *abc* avec la ligne SD. Si on conduit un plan suivant cette ligne et le point A, l'intersection de ce plan avec le plan *abc* sera une ligne droite qui sera perpendiculaire sur *bc*, donc S*f* sera aussi perpendiculaire sur *bc*, ainsi le plan S*af*

sera perpendiculaire sur le plan BSC, donc l'arc de grand cercle AOF sera perpendiculaire sur BC, de plus puisque le point O est le centre du cercle inscrit au triangle *fde* (1), le point O sera le pôle du petit cercle inscrit au triangle ABC, puisque le point O est sur l'axe d'un cône dont le sommet serait au point H, et qui aurait pour base le cercle inscrit au triangle *def*.

Les considérations géométriques dont nous avons fait usage dans ce qui précède, ont l'avantage de ramener à un petit nombre d'idées primitives des vérités qui paroissoient d'abord très-compliquées; c'est dans cette simplicité et particulièrement dans la surprise qu'elle nous cause, que se trouve la source des jouissances que ces mêmes vérités nous font éprouver.

---

(1) *Voyez* l'ouvrage qui a pour titre *Recueil de Problèmes résolus par des considérations purement géométriques*, pag. 105.

FIN

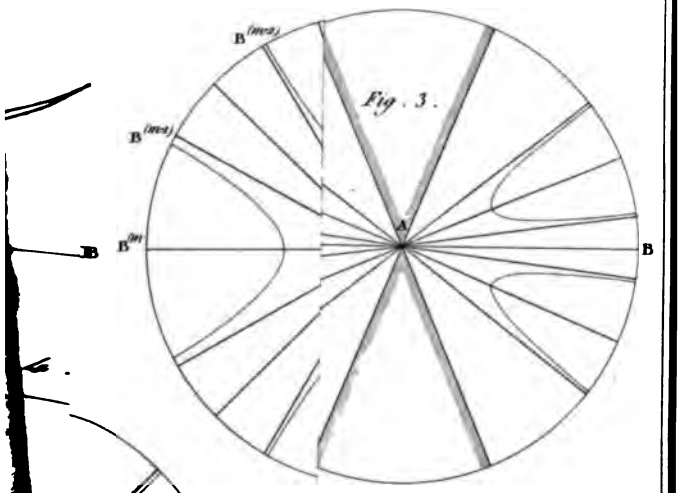
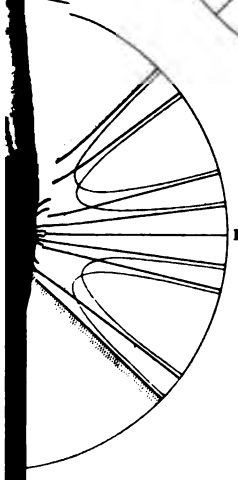


Fig. 3.



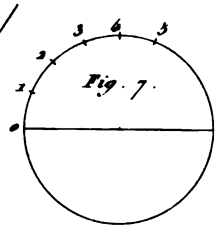


Fig. 7.

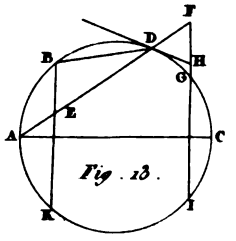


Fig. 13.

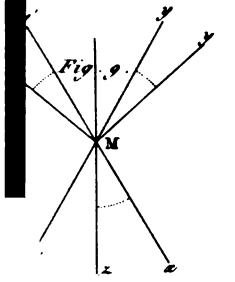
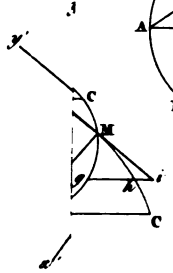
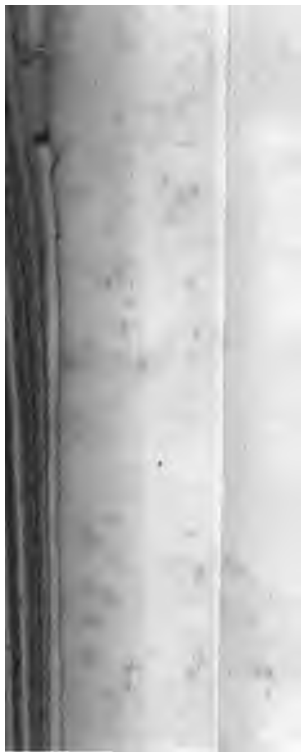
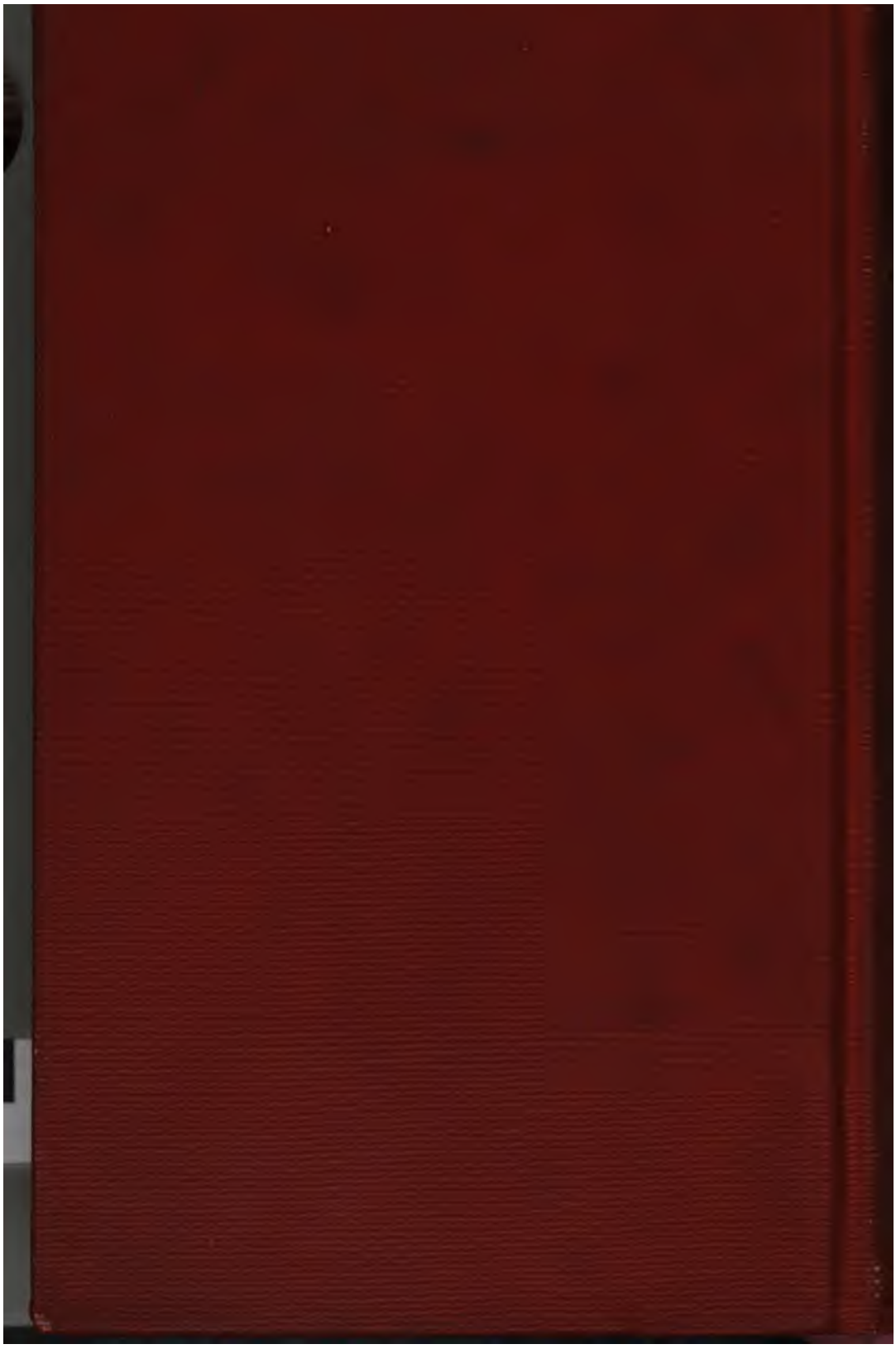


Fig. 9.





DEC 23 1937